درس اول: توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

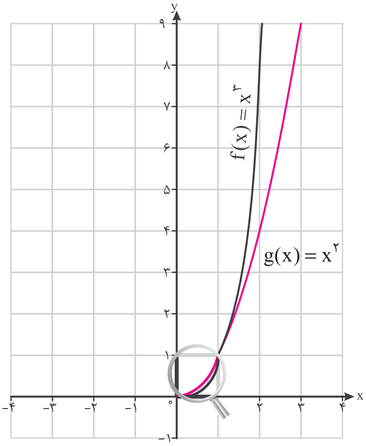
فعالیت صفحهٔ ۴ کتاب‌درسی

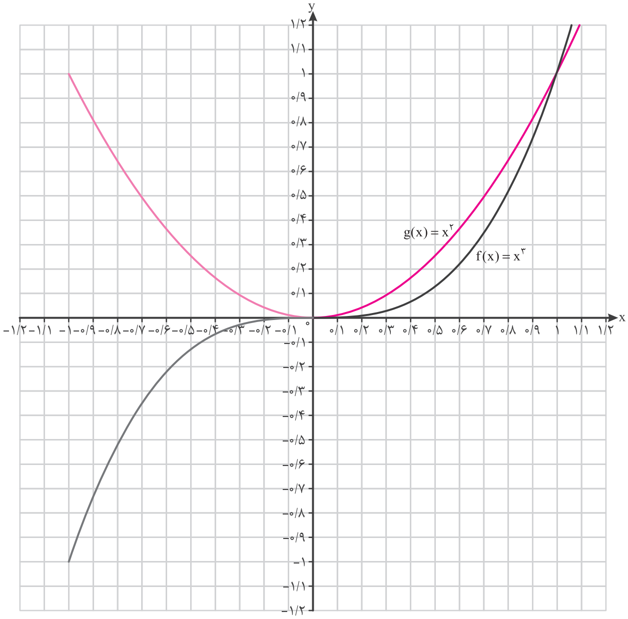
با توجه به نمودار توابع $f(x)=x^3$ و $g(x)=x^2$ که برای اعداد نامنفی رسم شده‌اند:

الف) آیا برای تمام xهای نامنفی، نمودار $f(x)=x^3$ بالای نمودار $g(x)=x^2$ قرار دارد؟

خیر، با توجه به نمودار، در بازهٔ $(0, 1)$ نمودار $g(x)=x^2$ بالای نمودار $f(x)=x^3$ قرار دارد.

ب) نمودار این دو تابع را در بازه $[-1, 0]$ رسم کنید.

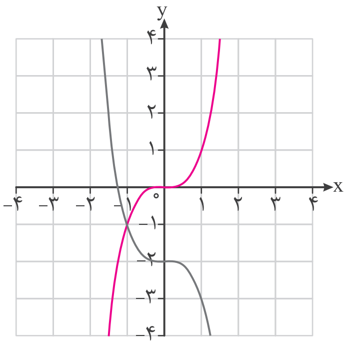




فعالیت صفحهٔ ۴ کتاب‌درسی

با استفاده از نمودار تابع $f(x)=x^3$ ، نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

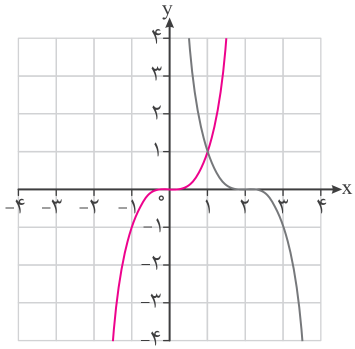
الف) $y=-x^3-2$



ابتدا نمودار $f(x)=x^3$ را نسبت به محور xها قرینه و سپس آن را ۲ واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم.

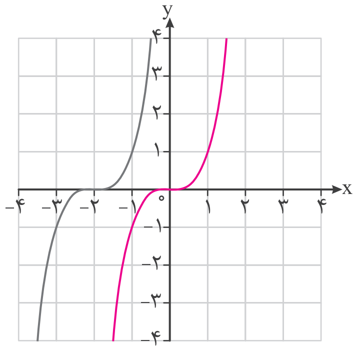
$D_f=\mathbb{R}$, $R_f=\mathbb{R}$

پ) $y=-(x-2)^3$



ابتدا نمودار $f(x)=x^3$ را دو واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و سپس آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. $D_f=\mathbb{R}$, $R_f=\mathbb{R}$

ب) $y=(x+2)^3$



نمودار $f(x)=x^3$ را دو واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم. $D_f=\mathbb{R}$, $R_f=\mathbb{R}$

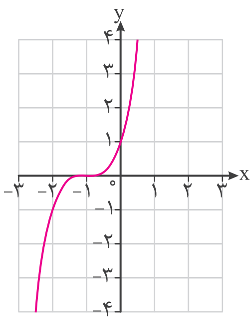
کار در کلاس ---------- صفحهٔ ۵ کتاب درسی

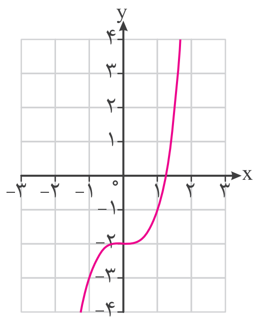
به کمک نمودار تابع $y=x^3$، ضابطهٔ هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

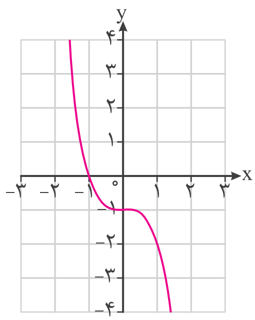
الف) $y=(x-1)^3+2$ ب) $y=(x-2)^3$ پ) $y=-x^3+1$

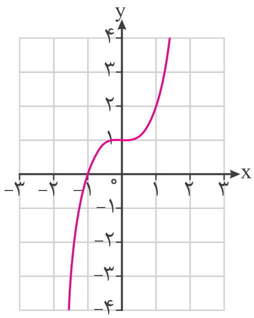
ت) $y=(x+1)^3-1$ ث) $y=-x^3$ ج) $y=(x+1)^3$

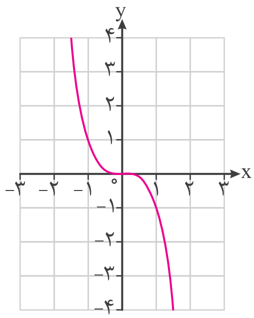
چ) $y=x^3+1$ ح) $y=-x^3-1$ خ) $y=x^3-2$

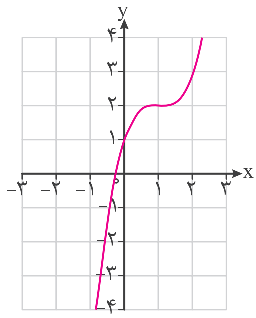

(۱)

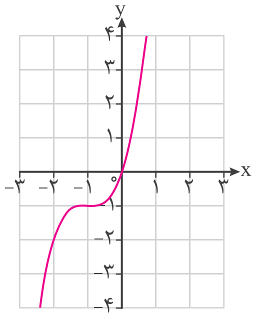

(۲)

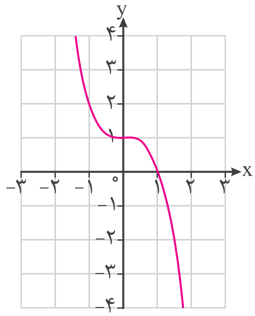

(۳)

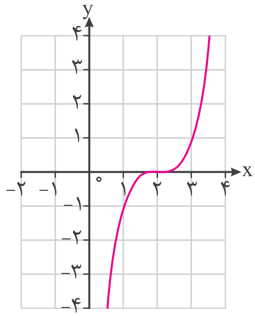

(۴)


(۵)


(۶)


(۷)


(۸)


(۹)

معادله	الف	ب	پ	ت	ث	ج	چ	ح	خ
نمودار	۶	۹	۸	۷	۵	۱	۴	۳	۲

فعالیت صفحهٔ ۶ کتاب درسی

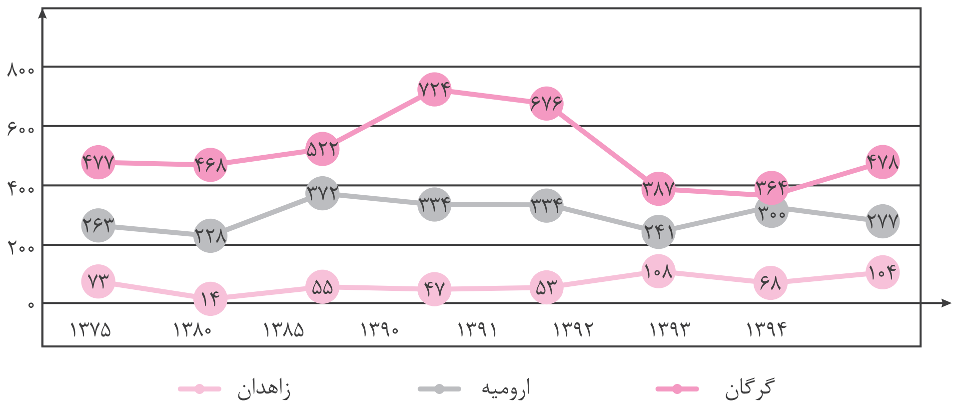
یکی از دغدغه‌های این روزها بحث کاهش بارندگی در کشورمان است که خسارات بسیاری را به بار می‌آورد. در نمودار زیر میزان بارندگی سالانه سه شهر گرگان، زاهدان و ارومیه از سال ۱۳۷۵ تا سال ۱۳۹۴ (برحسب میلی‌متر) آورده شده است. به طور مثال در شهر ارومیه در سال ۸۵، میزان بارندگی ۳۷۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۳۳۴ میلی‌متر بوده است که روند نزولی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. همچنین در شهر گرگان در سال ۸۵، میزان بارندگی ۵۲۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۷۲۴ میلی‌متر بوده است که روند صعودی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

الف) از سال ۷۵ تا ۹۱، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر گرگان روند صعودی داشته است؟

در فاصله‌های زمانی ۱۳۸۰ تا ۱۳۸۵، ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۰.

ب) از سال ۹۱ تا ۹۴، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر ارومیه روند نزولی داشته است؟

در فاصله‌های زمانی ۱۳۹۱ تا ۱۳۹۲ و ۱۳۹۳ تا ۱۳۹۴.



پرسش متن

صفحهٔ ۷ کتاب‌درسی

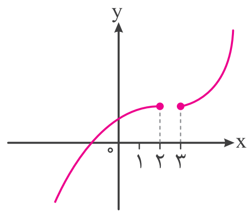
توابع اکیداً یکنوا همواره یکنوا هستند. آیا عکس این مطلب صحیح است؟ توضیح دهید.

خیر، زیرا اگر تابعی یکنوا باشد، ممکن است اکیداً یکنوا نباشد. مانند تابع ثابت $f(x)=k \quad (k\in\mathbb{R})$. در این نوع تابع اگر $x_1<x_2$ آنگاه $f(x_1)=f(x_2)$ و این یعنی اکیداً یکنوا نیست.

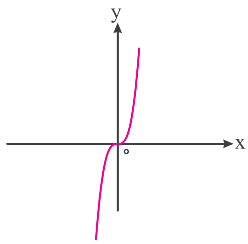
کار در کلاس

صفحهٔ ۸ کتاب‌درسی

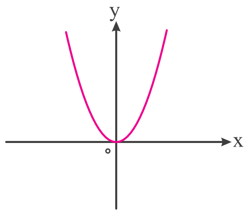
هر کدام از توابع زیر در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟



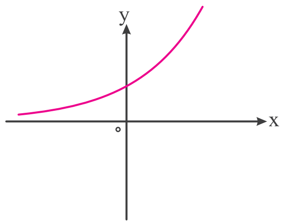
(الف)



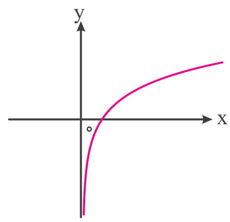
(ب)



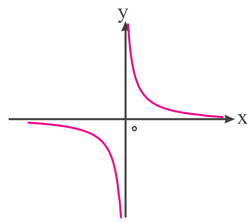
(پ)



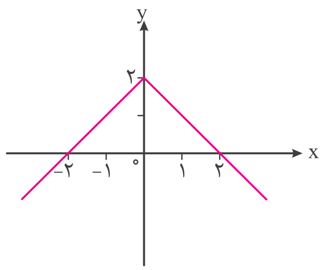
(ت)



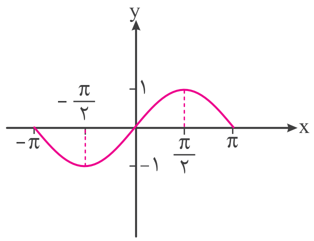
(ث)



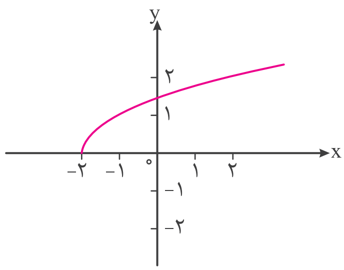
(ج)



(چ)



(ح)



(خ)

الف) در دامنهٔ تعریف خود، یعنی $(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$ صعودی است ولی در هر یک از بازه‌های $[3,+\infty)$ و $(-\infty,2]$ اکیداً صعودی است.

ب) در بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

پ) در بازه $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است، اما در $\mathbb{R}$ نه صعودی است و نه نزولی.

ت) در بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

ریاضی

فصل ۱

ث) در بازهٔ $(\circ , +\infty)$ اکیداً صعودی است.

ج) در هر یک از بازه‌های $(\circ , +\infty)$ و $(-\infty , \circ)$ اکیداً نزولی است.

چ) در بازهٔ $(-\infty , \circ]$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $[\circ , +\infty)$ اکیداً نزولی است، اما در $\mathbb{R}$ نه صعودی است و نه نزولی.

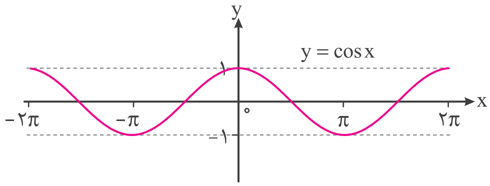
ح) در هر یک از بازه‌های $[-\pi , \frac{-\pi}{۲}]$ و $[\frac{\pi}{۲} , \pi]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲} , \frac{\pi}{۲}]$ اکیداً صعودی است.

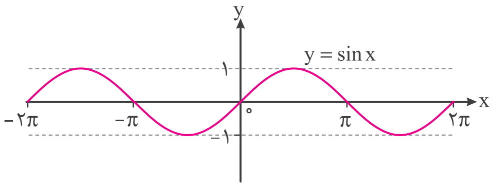
خ) در بازهٔ $[-۲ , +\infty)$ اکیداً صعودی است.

کار در کلاس

صفحهٔ ۹ کتاب درسی

نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ در بازهٔ $[-۲\pi , ۲\pi]$ رسم شده است. صعودی یا نزولی بودن آنها را در بازه‌های مشخص شده تعیین نمایید.





x	$[-۲\pi,-\frac{۳\pi}{۲}]$	$[-\frac{۳\pi}{۲},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{۲}]$	$[-\frac{\pi}{۲},\circ]$	$[\circ,\frac{\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲},\pi]$	$[\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$
$y = \sin x$	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	**صعودی**	نزولی	نزولی	صعودی

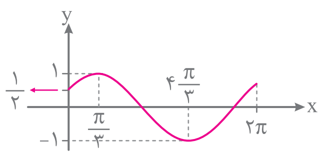
x	$[-۲\pi,-\frac{۳\pi}{۲}]$	$[-\frac{۳\pi}{۲},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{۲}]$	$[-\frac{\pi}{۲},\circ]$	$[\circ,\frac{\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲},\pi]$	$[\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$
$y = \cos x$	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	**صعودی**	صعودی

کار در کلاس

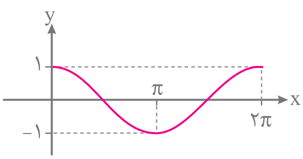
صفحهٔ ۹ کتاب درسی

نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

الف) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{۳}) \quad D_f = [\circ , ۲\pi]$



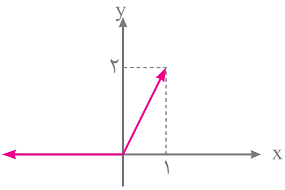
$f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{۳})$



$y = \cos x$

تابع f در بازه‌های $[\circ , \frac{\pi}{۳}]$ و $[\frac{۴\pi}{۳} , ۲\pi]$ صعودی و در بازهٔ $[\frac{\pi}{۳} , \frac{۴\pi}{۳}]$ نزولی است.

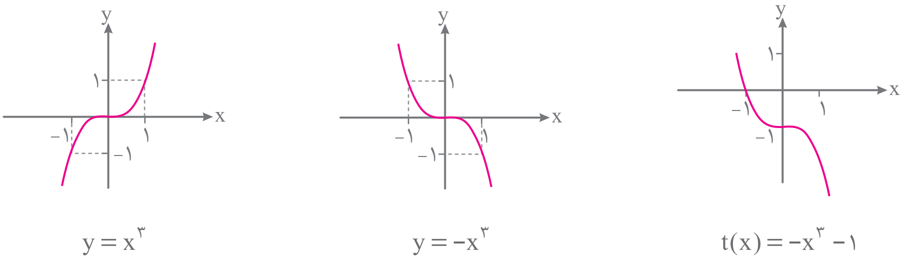
ب) $g(x)=x+|x|$



$$g(x)=\begin{cases} x+(-x)=0 & x<0 \\ x+x=2x & x\geq 0 \end{cases}$$

تابع g در بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ (یعنی $\mathbb{R}$) صعودی است.

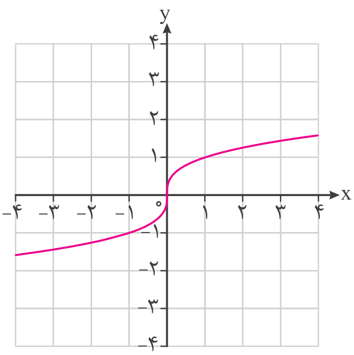
پ) $t(x)=-x^3-1$



تابع t در $\mathbb{R}$ یا بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ (یعنی $\mathbb{R}$) نزولی است.

فعالیت صفحهٔ ۱۰ کتاب‌درسی

به نمودار تابع روبه‌رو دقت کنید.



الف) این تابع اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟

اکیداً صعودی است، چون: $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

ب) این تابع یک‌به‌یک است؟

بله، زیرا هر خط موازی محور xها نمودار تابع را در یک نقطه قطع می‌کند.

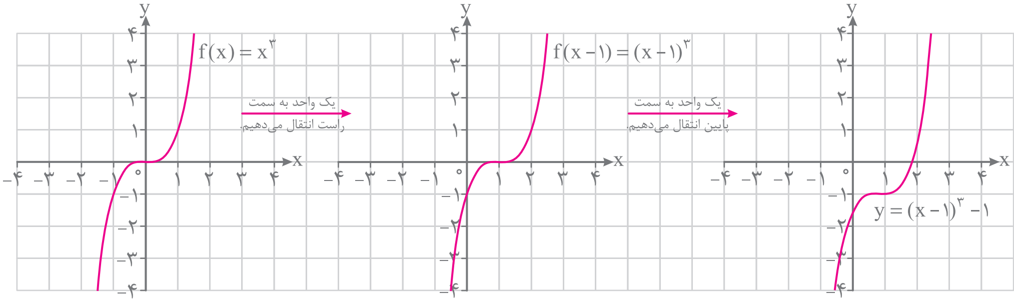
پ) آیا تابعی وجود دارد که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد ولی یک‌به‌یک نباشد؟

خیر، زیرا به فرض خلف، اگر تابع یک‌به‌یک نباشد، به ازای $x_1<x_2$ دو نقطهٔ متمایز (x_1,y) و (x_2,y) با مؤلفه‌های دوم یکسان، عضو تابع خواهند بود. بنابراین به ازای دو نقطه داریم: $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$ و این یعنی تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی نیست که متناقض با فرض مسئله است. بنابراین فرض خلف باطل است. پس اگر تابعی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، حتماً یک‌به‌یک است.

تمرین
صفحهٔ ۱۰ کتاب‌درسی

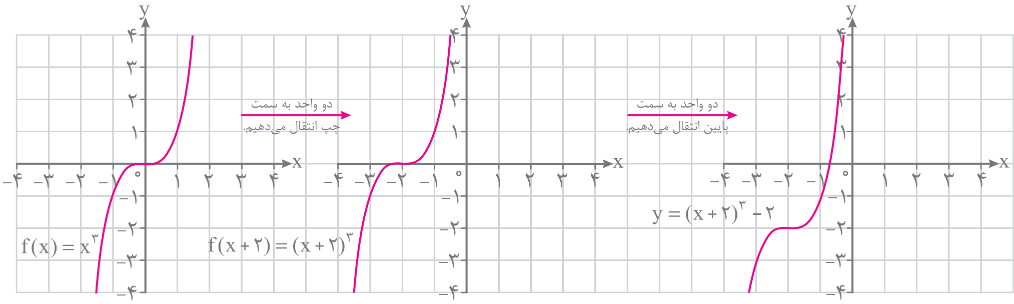
۱ نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص نمایید.

الف) $y=(x-۱)^۳-۱$



$D_y=\mathbb{R}$ $R_y=\mathbb{R}$

ب) $y=(x+۲)^۳-۲$



$D_y=\mathbb{R}$ $R_y=\mathbb{R}$

۲ نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-۲x-۳ & x<-۴\\ ۳ & -۴\le x<۲\\ ۳x-۲ & x\ge ۲\end{cases}$$

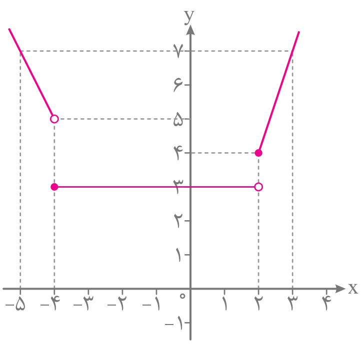
ضابطهٔ $y=-۲x-۳$ معادلهٔ یک خط در بازهٔ $(-\infty,-۴)$ است که برای رسم آن از دو نقطه استفاده می‌کنیم:

x	−۴	−۵
y	۵	۷

ضابطهٔ $y=۳$ معادلهٔ تابعی ثابت در بازهٔ $[-۴,۲)$ است.

ضابطهٔ $y=۳x-۲$ معادلهٔ یک خط در بازهٔ $[۲,+\infty)$ است که برای رسم آن نیز از دو نقطه استفاده می‌کنیم:

x	۲	۳
y	۴	۷

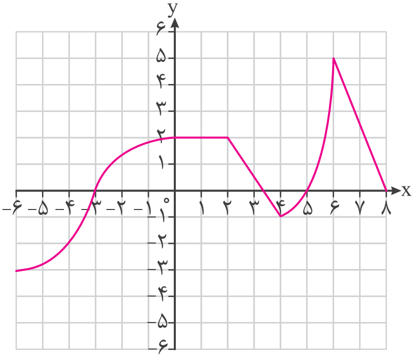


تابع f در بازهٔ $(-\infty,-۴)$ اکیداً نزولی است. (در بازهٔ $(-\infty,۲)$ نزولی است.)

تابع f در بازهٔ $[-۴,۲)$ ثابت است.

تابع f در بازهٔ $[۲,+\infty)$ اکیداً صعودی است. (در بازهٔ $[-۴,+\infty)$ صعودی است.)

۳) با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟

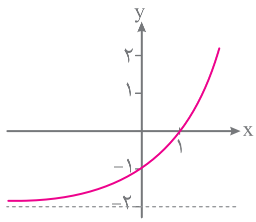


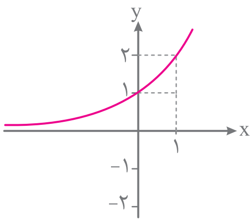
بازه‌هایی که تابع در آنها صعودی است: $(-\infty, ۲]$ و $[۴, ۶]$.

بازه‌هایی که تابع در آنها نزولی است: $[۰, ۴]$ و $[۶, +\infty)$.

بازه‌ای که تابع در آن ثابت است: $[۰, ۲]$.

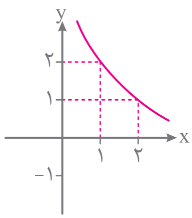
۴) تابع نمایی $y = ۲^x - ۲$ و تابع لگاریتمی $y = -\log_۲^x + ۲$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.

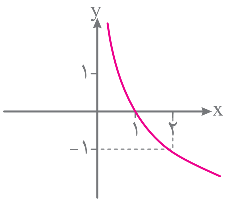


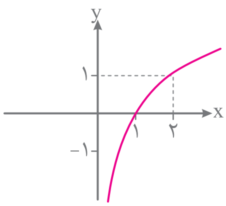


$$f(x) = ۲^x \xrightarrow{\text{دو واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.}} f(x) - ۲ = ۲^x - ۲$$

با توجه به نمودار، تابع $y = ۲^x - ۲$ در بازهٔ $(-\infty, +\infty)$ یعنی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است، پس اکیداً یکنواست.





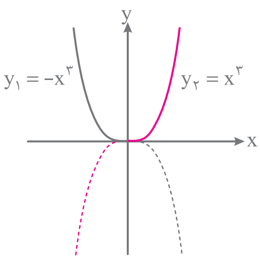


$$f(x) = \log_۲^x \xrightarrow[\text{قرینه می‌کنیم}]{\text{نسبت به محور xها}} -f(x) = -\log_۲^x \xrightarrow[\text{منتقل می‌کنیم.}]{\text{۲ واحد به سمت بالا}} -f(x) + ۲ = -\log_۲^x + ۲$$

با توجه به نمودار، تابع $y = -\log_۲^x + ۲$ در دامنهٔ خودش یعنی بازهٔ $(۰, +\infty)$ اکیداً نزولی است، پس اکیداً یکنواست.

۵) تابع $y = x^۲ |x|$ در بازهٔ $(-\infty, a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a چقدر است؟

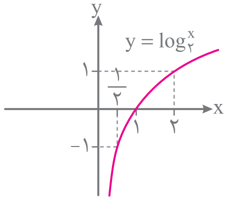
$$y = x^۲ |x| = \begin{cases} x^۲(-x) = -x^۳ & x < ۰ \\ x^۲(x) = x^۳ & x \geq ۰ \end{cases}$$

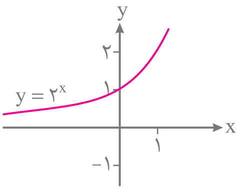


با توجه به نمودار، تابع $y = x^۲ |x|$ در بازهٔ $(-\infty, ۰]$ نزولی است، پس حداکثر مقدار a برابر صفر است.

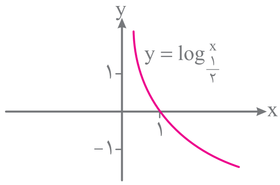
۶ **تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً نزولی باشد.**

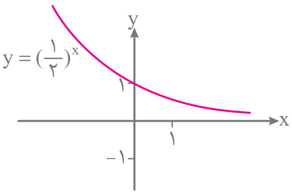
مثال‌هایی برای توابع اکیداً صعودی:





مثال‌هایی برای توابع اکیداً نزولی:





درس دوم: ترکیب توابع

فعالیت صفحهٔ ۱۱ و ۱۲ کتاب درسی

هنگامی که غذا از یخچال بیرون آورده می‌شود، دمای آن با گذشت زمان افزایش می‌یابد و مقدار این دما با استفاده از تابع $d(t)$ با ضابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$d(t) = 4t + 2 \quad ; \quad 0 \le t \le 3$$ (واحد t، ساعت است.)

الف) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$d(2) = 10$ **دمای غذایی که دو ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر ۱۰ درجهٔ سانتی‌گراد است.**

$d(1) = 6$ دمای غذایی که یک ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر ۶ درجهٔ سانتی‌گراد است.

$d(3) = 14$ دمای غذایی که سه ساعت از یخچال بیرون مانده است برابر ۱۴ درجهٔ سانتی‌گراد است.

همچنین اگر یک مادهٔ غذایی را با دمای ۲ درجهٔ سانتی‌گراد از یخچال بیرون آوریم، میزان افزایش تعداد باکتری‌ها با بالا رفتن دما با استفاده از تابع $n(d)$ با ضابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$n(d) = 20d^2 - 80d + 500 \quad ; \quad 2 \le d \le 14$$

که در این تابع، d دمای مادهٔ غذایی پس از خروج از یخچال بر حسب درجهٔ سانتی‌گراد است.

ب) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$$n(10) = 20(10)^2 - 80(10) + 500 = 1700$$

یعنی تعداد باکتری‌های موجود در یک مادهٔ غذایی، پس از خروج از یخچال با رسیدن به دمای ۱۰ درجهٔ سانتی‌گراد به ۱۷۰۰ افزایش یافته است.

$$n(2) = 20(2)^2 - 80(2) + 500 = 420$$

یعنی تعداد باکتری‌های موجود در یک مادهٔ غذایی، پس از خروج از یخچال با رسیدن به دمای ۲ درجهٔ سانتی‌گراد به ۴۲۰ افزایش یافته است.

$$n(3) = 20(3)^2 - 80(3) + 500 = 440$$

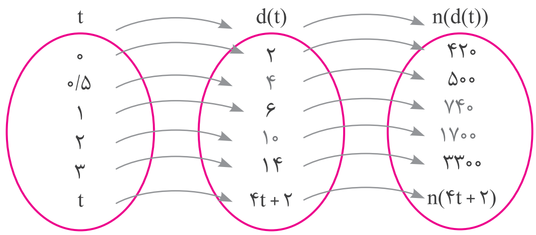
یعنی تعداد باکتری‌های موجود در یک مادهٔ غذایی، پس از خروج از یخچال با رسیدن به دمای ۳ درجهٔ سانتی‌گراد به ۴۴۰ افزایش یافته است.

به طور کلی می‌توان گفت با استفاده از تابع d ، با داشتن زمان، می‌توان دمای غذا و با استفاده از تابع n، با داشتن دمای غذا، می‌توان تعداد باکتری‌ها را به دست آورد، به عبارت دیگر: زمان $\xrightarrow{d}$ دما $\xrightarrow{n}$ تعداد باکتری‌ها

از الف و ب می‌توان نتیجه گرفت: تعداد باکتری‌های موجود در یک مادهٔ غذایی که به میزان ۲ ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر ۱۷۰۰ تاست.

پ) جدول روبه‌رو را کامل کنید و به کمک آن نمودار را تکمیل نمایید.

t	$d(t)=۴t+۲$	$n(d(t))=n(۴t+۲)$
۰	$d(۰)=۲$	$n(d(۰))=n(۲)=۴۲۰$
۰/۵	$d(۰/۵)=۴$	$n(d(۰/۵))=n(۴)=۵۰۰$
۱	$d(۱)=۶$	$n(d(۱))=n(۶)=۷۴۰$
۲	$d(۲)=۱۰$	$n(d(۲))=n(۱۰)=۱۷۰۰$
۳	$d(۳)=۱۴$	$n(d(۳))=n(۱۴)=۳۳۰۰$



همان‌طور که دیدیم، می‌توان با داشتن زمان، دمای غذا را به دست آورد و با داشتن دما، تعداد باکتری‌ها قابل محاسبه است.

آیا به نظر شما می‌توان با داشتن زمان و بدون داشتن دما، تعداد باکتری‌ها را به دست آورد؟ بله

به بیان دیگر آیا می‌توان تابعی ساخت که n را بر حسب t مشخص کند؟ بله

برای به دست آوردن چنین تابعی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$n(d(t))=n(۴t+۲)=۲۰(۴t+۲)^۲-۸۰(۴t+۲)+۵۰۰=۲۰(۱۶t^۲+۱۶t+۴)-۳۲۰t-۱۶۰+۵۰۰$$

$$=۳۲۰t^۲+۴۲۰ \qquad ۰\le t\le ۳$$

$n(d(t))$ تعداد باکتری‌های موجود در غذای یخچالی را نشان می‌دهد که به میزان t ساعت از یخچال بیرون مانده است.

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۴ کتاب‌درسی

با توجه به جدول‌های زیر، مقادیر خواسته‌شده را در صورت امکان به دست آورید.

x	f(x)
−۳	−۷
−۲	−۵
−۱	−۳
۰	−۱
۱	۳
۲	۵
۳	۵

x	g(x)
−۳	۸
−۲	۳
−۱	۰
۰	−۱
۱	۰
۲	۳
۳	۸

الف) $(fog)(۱)=f(g(۱))=f(۰)=-۱$

ب) $(fog)(-۱)=f(g(-۱))=f(۰)=-۱$

پ) $(gof)(۰)=g(f(۰))=g(-۱)=۰$

ت) $(gog)(-۲)=g(g(-۲))=g(۳)=۸$

ث) $(gof)(۲)=g(f(۲))=g(۵)\Rightarrow$ تعریف‌نشده

ج) $(fof)(۱)=f(f(۱))=f(۳)=۵$

ریاضی
فصل ۱

پرسش متن
صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی

اگر دامنه و ضابطهٔ توابع gof و fog را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

دامنه و ضابطهٔ توابع gof و fog لزوماً با هم برابر نیستند و می‌توانند متفاوت باشند.

کار در کلاس
صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی

اگر $f(x)=\frac{۲}{x-۱}$ ، $g(x)=\frac{۳}{x}$، دامنه و ضابطهٔ fog و fof را به دست آورید.

می‌دانیم دامنهٔ توابع کسری برابر است با {ریشه‌های مخرج}$-\mathbb{R}$ ، پس: $D_f=\mathbb{R}-\{۱\}\,,\,D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$

محاسبهٔ دامنهٔ fog: $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

$=\{x\in\mathbb{R}-\{۰\}\mid \frac{۳}{x}\in\mathbb{R}-\{۱\}\}=\{x\in\mathbb{R}-\{۰\}\mid \frac{۳}{x}\neq ۱\}=\{x\in\mathbb{R}-\{۰\}\mid x\neq ۳\}=\mathbb{R}-\{۰,۳\}$

محاسبهٔ ضابطهٔ fog: $(fog)(x)=f(g(x))=\frac{۲}{g(x)-۱}=\frac{۲}{\frac{۳}{x}-۱}=\frac{۲}{\frac{۳-x}{x}}=\frac{۲x}{۳-x}$

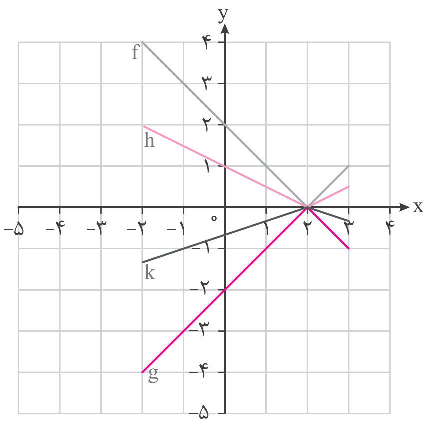
محاسبهٔ دامنهٔ fof: $D_{fof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}-\{۱\}\mid \frac{۲}{x-۱}\in\mathbb{R}-\{۱\}\}=\{x\in\mathbb{R}-\{۱\}\mid \frac{۲}{x-۱}\neq ۱\}$

$=\{x\in\mathbb{R}-\{۱\}\mid x\neq ۳\}=\mathbb{R}-\{۱\,,\,۳\}$

محاسبهٔ ضابطهٔ fof: $f(f(x))=\frac{۲}{\frac{۲}{x-۱}-۱}=\frac{۲}{\frac{۲-x+۱}{x-۱}}=\frac{۲(x-۱)}{۳-x}=\frac{۲x-۲}{۳-x}$

کار در کلاس
صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی

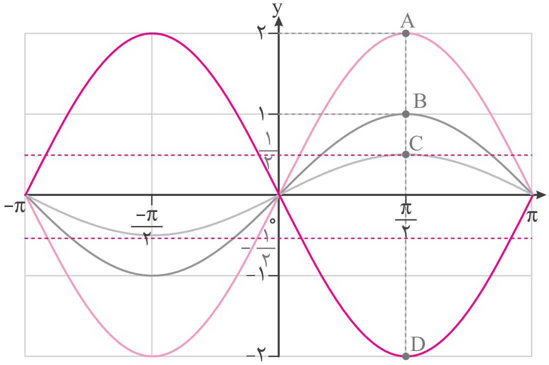
نمودار تابع $f(x)=|x-۲|$ را در بازهٔ $[-۲\,,\,۳]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $g(x)=-|x-۲|$ و $h(x)=\frac{۱}{۲}|x-۲|$ و $k(x)=-\frac{۱}{۳}|۲-x|$ را رسم کنید.



کار در کلاس

صفحهٔ ۱۶ کتاب‌درسی

در شکل روبه‌رو نمودار توابع با ضابطه‌های $y=\sin x$ ، $y=۲\sin x$ ، $y=-۲\sin x$ و $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ رسم شده است. نمودار تابع $y=\sin x$ را مشخص کرده و توضیح دهید نمودار توابع دیگر چگونه به کمک آن رسم شده است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کرده و با هم مقایسه کنید.



نمودار	A	B	C	D
ضابطه	$y=۲\sin x$	$y=\sin x$	$y=\frac{۱}{۲}\sin x$	$y=-۲\sin x$
دامنه	$[-\pi,\pi]$	$[-\pi,\pi]$	$[-\pi,\pi]$	$[-\pi,\pi]$
برد	$[-۲,۲]$	$[-۱,۱]$	$[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}]$	$[-۲,۲]$

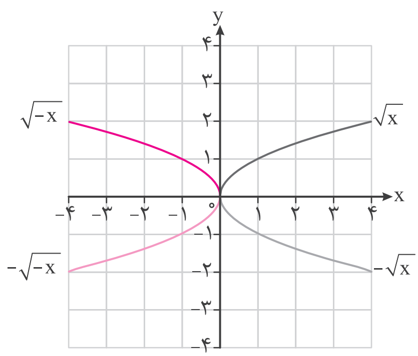
می‌دانیم برای رسم نمودار $y=kf(x)$ ، کافی است عرض نقاط تابع $f(x)$ را k برابر کنیم. بنابراین برای رسم $y=۲\sin x$ عرض هر نقطهٔ $y=\sin x$ را دو برابر می‌کنیم، برای رسم $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ عرض هر نقطهٔ $y=\sin x$ را $\frac{۱}{۲}$ برابر (نصف) می‌کنیم و برای رسم $y=-۲\sin x$ کافی است نمودار $y=۲\sin x$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. دامنهٔ همهٔ این توابع با هم برابر است ولی برد آنها با توجه به عددی که در تابع ضرب می‌شود، با هم متفاوت است.

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۹ کتاب‌درسی

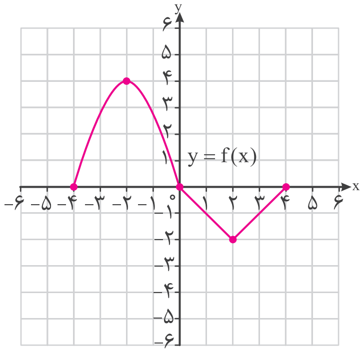
نمودار توابع $y=\sqrt{-x}$ و $y=-\sqrt{x}$ و $y=-\sqrt{-x}$ را به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم شده است. دامنه و برد توابع فوق را مشخص کنید.

تابع	دامنه	برد
$y=\sqrt{x}$	$[۰,+\infty)$	$[۰,+\infty)$
$y=\sqrt{-x}$	$(-\infty,۰]$	$[۰,+\infty)$
$y=-\sqrt{x}$	$[۰,+\infty)$	$(-\infty,۰]$
$y=-\sqrt{-x}$	$(-\infty,۰]$	$(-\infty,۰]$



کار در کلاس — صفحهٔ ۲۰ کتاب درسی

نمودار تابع f با دامنهٔ $[-۴\,,\,۴]$ به صورت زیر داده شده است، می‌خواهیم با استفاده از آن نمودار توابع $y=f(۲x)$ و $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنیم.



x	f(x)
−۴	۰
−۲	۴
۰	۰
۲	−۲
۴	۰

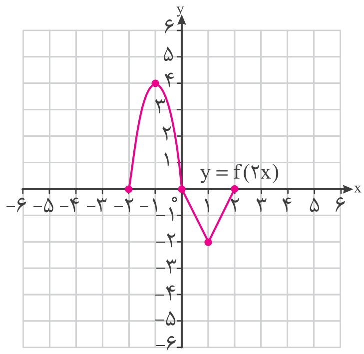
الف) برای تعیین دامنهٔ $y=f(۲x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$-۴\le ۲x\le ۴\rightarrow -۲\le x\le ۲$$

بنابراین دامنهٔ تابع $y=f(۲x)$ بازهٔ $[-۲\,,\,۲]$ است. جدول نقاط را کامل کنید.

برای رسم نمودار $f(۲x)$، طول نقاط با همان xها باید محاسبه شود.

x	۲x	f(۲x)	(x , f(۲x))
−۲	−۴	۰	(−۲ , ۰)
−۱	−۲	۴	(−۱ , ۴)
۰	۰	۰	(۰ , ۰)
۱	۲	−۲	(۱ , −۲)
۲	۴	۰	(۲ , ۰)

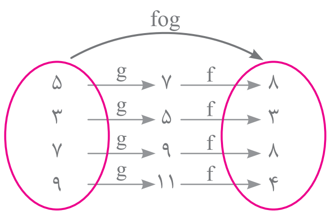


تمرین — صفحهٔ ۲۲ و ۲۳ کتاب درسی

۱) اگر $f=\{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\}$ و $g=\{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\}$، توابع fog و gof را به دست آورید.

در تابع fog ابتدا g روی دامنهٔ g عمل کرده و سپس تابع f روی خروجی تابع g اثر می‌کند.

$$\Rightarrow fog=\{(۵\,,\,۸)\,,\,(۳\,,\,۳)\,,\,(۷\,,\,۸)\,,\,(۹\,,\,۴)\}$$

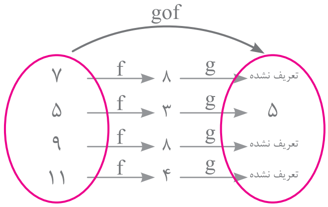


در تابع gof ابتدا f روی دامنهٔ f عمل کرده و سپس تابع g روی خروجی تابع f اثر می‌کند.

$$\Rightarrow gof=\{(۵\,,\,۵)\}$$

دقت کنید که تابع $gof(x)$ فقط به ازای $x=۵$ تعریف شده است.

$(D_{gof}=\{۵\})$



۲ در هر قسمت موارد خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

الف) $f(x)=x^{2}-5\ ;\ g(x)=\sqrt{x+6}:D_{fog}\ ,(fog)(x)$

$D_f=\mathbb{R}\ ,D_g=[-6,+\infty)$

$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}=\{x\in[-6,+\infty)\,|\,\sqrt{x+6}\in\mathbb{R}\}=\{x\in[-6,+\infty)\,|\,x\in[-6,+\infty)\}=[-6,+\infty)$

$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x+6})=(\sqrt{x+6})^{2}-5=x+6-5=x+1$

ب) $f(x)=\sqrt{3-2x}\ ;\ g(x)=\frac{6}{3x-5}:D_{fog}\ ,(fog)(x)$

$D_f=(-\infty,\frac{3}{2}]\ ,D_g=\mathbb{R}-\{\frac{5}{3}\}$

$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}-\{\frac{5}{3}\}\,|\,\underbrace{\frac{6}{3x-5}\in(-\infty,\frac{3}{2}]}_{(1)}\}=(-\infty,\frac{5}{3})\cup[3,+\infty)$

$(1):\frac{6}{3x-5}\le\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{6}{3x-5}-\frac{3}{2}\le 0\Rightarrow\frac{12-9x+15}{2(3x-5)}\le 0\Rightarrow\frac{-9x+27}{6x-10}\le 0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}x<\frac{5}{3}$ یا $x\ge 3$

$(fog)(x)=f(g(x))=f(\frac{6}{3x-5})=\sqrt{3-2(\frac{6}{3x-5})}=\sqrt{3-\frac{12}{3x-5}}=\sqrt{\frac{9x-15-12}{3x-5}}=\sqrt{\frac{9x-27}{3x-5}}=3\sqrt{\frac{x-3}{3x-5}}$

پ) $f(x)=\sqrt{x+2}\ ;\ g(x)=\sqrt{x^{2}-16}:D_{gof}\ ,(gof)(x)$

$D_f=[-2,+\infty)\ ,D_g=(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$

$D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}=\{x\in[-2,+\infty)\,|\,\underbrace{\sqrt{x+2}\in(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)}_{(1)}\}$

$=\{x\in[-2,+\infty)\,|\,x\in[14,+\infty)\}=[14,+\infty)$

$(1):\underbrace{\sqrt{x+2}\le -4}_{\text{غیرممکن}}$ یا $\sqrt{x+2}\ge 4\Rightarrow\sqrt{x+2}\ge 4\Rightarrow x+2\ge 16\Rightarrow x\ge 14\Rightarrow x\in[14,+\infty)$

$(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x+2})=\sqrt{(\sqrt{x+2})^{2}-16}=\sqrt{x+2-16}=\sqrt{x-14}$

ت) $f(x)=\sin x\ ;\ g(x)=\sqrt{x}:D_{gof}\ ,(gof)(x)$

$D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_g=[0,+\infty)$

$D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,\underbrace{\sin x\in[0,+\infty)}_{(1)}\}=[2k\pi,(2k+1)\pi];\ k\in\mathbb{Z}$

$(1):\sin x\ge 0\Rightarrow 2k\pi+0\le x\le 2k\pi+\pi\Rightarrow x\in[2k\pi,(2k+1)\pi]\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

$(gof)(x)=g(f(x))=g(\sin x)=\sqrt{\sin x}$

۳) اگر $f(g(x))=3x^2-6x+14$ و $f(x)=3x-4$ ، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به دست آورید.

ابتدا در تابع $f(x)$ ، x را تبدیل به $g(x)$ می‌کنیم و با مقایسه با $f(g(x))$ ، ضابطهٔ $g(x)$ را می‌یابیم.

$$f(x)=3x-4 \xrightarrow{x\to g(x)} f(g(x))=3g(x)-4 \Rightarrow 3x^2-6x+14=3g(x)-4 \Rightarrow 3g(x)=3x^2-6x+18$$

$$\Rightarrow g(x)=x^2-2x+6$$

۴) مشخص کنید کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x)=x^2-4$ و $g(x)=\sqrt{x^2-4}$ ؛ آنگاه $(fog)(5)=-25$.

نادرست است، زیرا: $(fog)(5)=f(g(5))=f(\sqrt{25-4})=f(\sqrt{21})=(\sqrt{21})^2-4=21-4=17$

ب) برای دو تابع f و g که $f\neq g$ تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست.

نادرست است، زیرا برای دو تابع $f(x)=x$ و $g(x)=2x$ داریم: $f\neq g$ ، اما:

$$\left.\begin{aligned}(fog)(x)=f(g(x))=f(2x)=2x\\(gof)(x)=g(f(x))=g(x)=2x\end{aligned}\right\}\Rightarrow (fog)(x)=(gof)(x)$$

دقت داشته باشید که $D_{gof}=D_{fog}=\mathbb{R}$.

پ) اگر $f(7)=5$ و $g(4)=7$ ، آنگاه $(fog)(4)=5$.

درست است، زیرا: $(fog)(4)=f(g(4))=f(7)=5$

ت) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=2x-1$ ، آنگاه $(fog)(5)=g(2)$.

درست است، زیرا:
$$\left.\begin{aligned}(fog)(5)=f(g(5))=f(2(5)-1)=f(9)=\sqrt{9}=3\\g(2)=2(2)-1=4-1=3\end{aligned}\right\}\Rightarrow (fog)(5)=g(2)$$

۵) الناز می‌خواهد از فروشگاه بهار یک لپ‌تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه‌ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنج‌شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام یک از حالت‌های الف یا ب به نفع الناز است؟

الف) اول کارت تخفیف ۲۰درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

فرض می‌کنیم قیمت لپ‌تاپ $x\geq 2000000$ بر حسب تومان باشد. در این صورت:

تابعی که تخفیف ٪۲۰ می‌دهد: $f(x)=x-0/2x=0/8x$

تابعی که تخفیف ۲۰۰۰۰۰ تومانی می‌دهد: $g(x)=x-200000$

حالت الف: $x\xrightarrow{f}f(x)\xrightarrow{g}g(f(x))=(gof)(x)$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(0/8x)=0/8x-200000$$

حالت ب: $x\xrightarrow{g}g(x)\xrightarrow{f}f(g(x))=(fog)(x)$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x-200000)=0/8(x-200000)=0/8x-160000$$

همان‌طور که دیده می‌شود، به ازای $x>2000000$ داریم $(fog)(x)>(gof)(x)$ یعنی میزان پرداختی الناز در حالت الف کمتر و در نتیجه به نفع الناز است.

۶ تابع $h(x)=(۳x^۲-۴x+۱)^۵$ ترکیب کدام دو تابع زیر است؟

الف) $f(x)=\sqrt[۵]{x}\ ;\ g(x)=۳x^۲-۴x+۱$

ضابطه‌های $(fog)(x)$ و $(gof)(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(۳x^۲-۴x+۱)=\sqrt[۵]{۳x^۲-۴x+۱}\neq h(x)\ \times$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt[۵]{x})=۳(\sqrt[۵]{x})^۲-۴(\sqrt[۵]{x})+۱\neq h(x)\ \times$$

ب) $k(x)=x^۵\ ;\ l(x)=۳x^۲-۴x+۱$

ضابطه‌های $(kol)(x)$ و $(lok)(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(kol)(x)=k(l(x))=k(۳x^۲-۴x+۱)=(۳x^۲-۴x+۱)^۵=h(x)\ \checkmark$$

$$(lok)(x)=l(k(x))=l(x^۵)=۳(x^۵)^۲-۴(x^۵)+۱\neq h(x)\ \times$$

۷ هر یک از توابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصربه‌فرد است؟

الف) $h(x)=\sqrt[۳]{x^۲+۱}$

مثال ۱: $f(x)=\sqrt[۳]{x}\ ,\ g(x)=x^۲+۱\Rightarrow (fog)(x)=f(g(x))=f(x^۲+۱)=\sqrt[۳]{x^۲+۱}$

مثال ۲: $f(x)=\sqrt[۳]{x+۱}\ ,\ g(x)=x^۲\Rightarrow (fog)(x)=f(g(x))=f(x^۲)=\sqrt[۳]{x^۲+۱}$

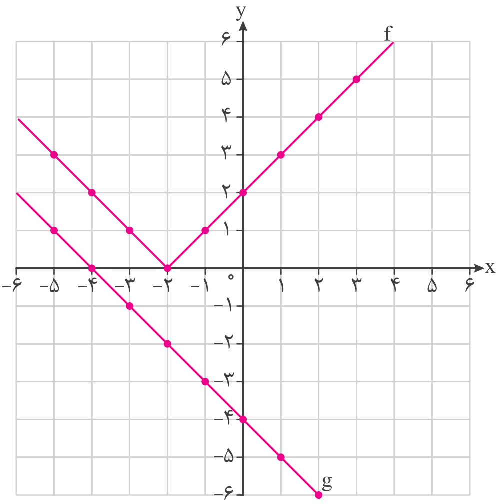
ب) $l(x)=\sqrt{x^۲+۵}$

مثال ۱: $f(x)=\sqrt{x}\ ,\ g(x)=x^۲+۵\Rightarrow (fog)(x)=f(x^۲+۵)=\sqrt{x^۲+۵}$

مثال ۲: $f(x)=\sqrt{x+۱}\ ,\ g(x)=x^۲+۴\Rightarrow (fog)(x)=f(g(x))=f(x^۲+۴)=\sqrt{x^۲+۴+۱}=\sqrt{x^۲+۵}$

همان‌طور که دیده می‌شود، جواب منحصربه‌فرد نیست.

۸ با توجه به نمودارهای توابع f و g، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.



الف) $(fog)(-۱)=f(g(-۱))=f(-۳)=۱$

ب) $(gof)(۰)=g(f(۰))=g(۲)=-۶$

پ) $(fog)(۱)=f(g(۱))=f(-۵)=۳$

ت) $(gof)(-۱)=g(f(-۱))=g(۱)=-۵$

۹) با توجه به ضابطه‌های توابع f و g، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

الف) $f(x)=۲x-۵\ ,\ g(x)=x^{۲}-۳x+۸\ :\ (fog)(x)=۷$

ابتدا ضابطهٔ $(fog)(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^{۲}-۳x+۸)=۲(x^{۲}-۳x+۸)-۵=۲x^{۲}-۶x+۱۱$$

$$(fog)(x)=۷\Rightarrow ۲x^{۲}-۶x+۱۱=۷\Rightarrow ۲x^{۲}-۶x+۴=۰\xrightarrow{\div ۲}x^{۲}-۳x+۲=۰\Rightarrow(x-۱)(x-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\x=۲\end{cases}$$

ب) $f(x)=۳x^{۲}+x-۱\ ,\ g(x)=۱-۲x\ :\ (gof)(x)=-۵$

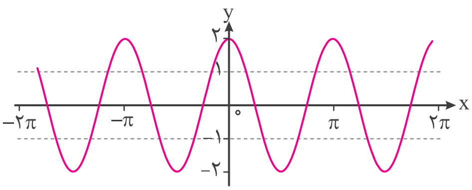
$$(gof)(x)=g(f(x))=g(۳x^{۲}+x-۱)=۱-۲(۳x^{۲}+x-۱)=۱-۶x^{۲}-۲x+۲=-۶x^{۲}-۲x+۳$$

$$(gof)(x)=-۵\Rightarrow -۶x^{۲}-۲x+۳=-۵\Rightarrow -۶x^{۲}-۲x+۸=۰\xrightarrow{\div(-۲)}۳x^{۲}+x-۴=۰$$

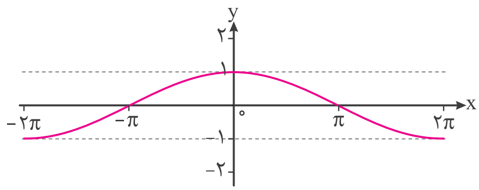
$$x=\frac{-۱\pm\sqrt{(۱)^{۲}-۴(۳)(-۴)}}{۲(۳)}=\frac{-۱\pm\sqrt{۱+۴۸}}{۶}=\frac{-۱\pm ۷}{۶}\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\x=-\frac{۴}{۳}\end{cases}$$

۱۰) با استفاده از نمودار $y=\cos x$ ، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.

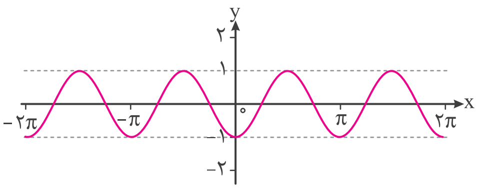
الف) $y=-\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{۱}{۲}x)$ ب) $y=۲\cos ۲x$ پ) $y=\cos(\frac{۱}{۲}x)$ ت) $y=-\cos ۲x$



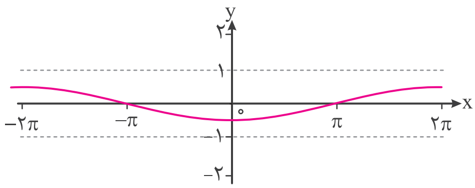
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

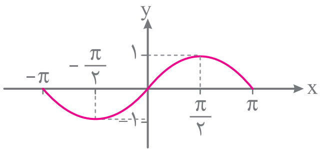
ضابطه	الف	ب	پ	ت
نمودار	۴	۱	۲	۳

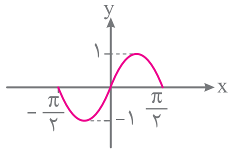
ریاضی

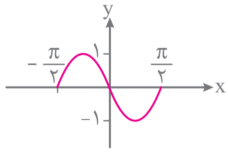
فصل ۱

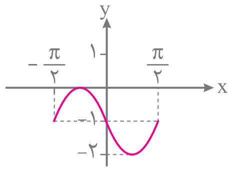
۱۱) نمودار توابع $y=-\sin 2x-1$ و $y=2\sin(\frac{-1}{3}x)$ را به کمک نمودار تابع $y=\sin x$ در بازهٔ $[-\pi , \pi]$ رسم کنید.

نمودار $y=\sin x$ در بازهٔ $[-\pi , \pi]$ به صورت روبه‌روست:

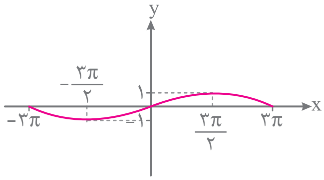


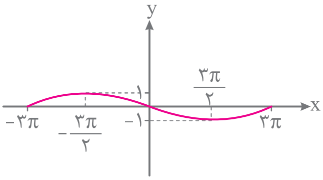


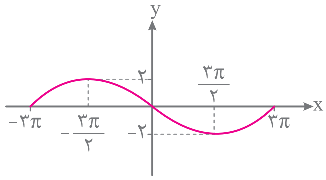




$y_1=\sin 2x \xrightarrow[\text{قرینه می‌کنیم.}]{\text{نسبت به محور xها}} y_2=-\sin 2x \xrightarrow[\text{منتقل می‌کنیم.}]{\text{یک واحد به سمت پایین}} y=-\sin 2x-1$

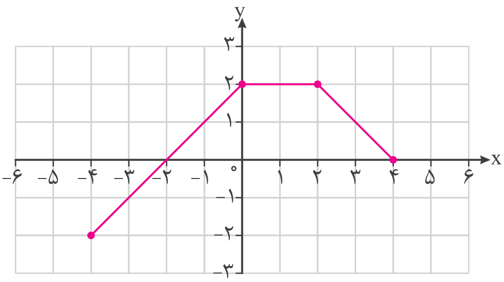




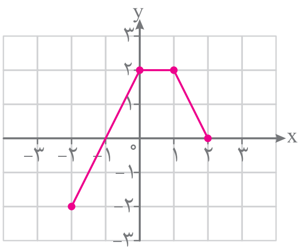


$y_1=\sin(\frac{1}{3}x) \xrightarrow[\text{قرینه‌می‌کنیم.}]{\text{نسبت به محور yها}} y_2=\sin(-\frac{1}{3}x) \xrightarrow[\text{دو برابر می‌کنیم.}]{\text{عرض نقاط را}} y=2\sin(-\frac{1}{3}x)$

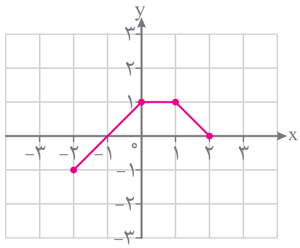
۱۲) با استفاده از نمودار تابع f، نمودارهای خواسته‌شده را رسم کنید.



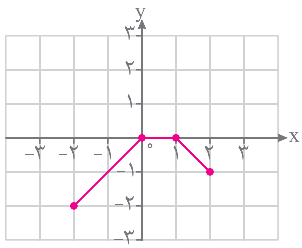
الف) $y=\frac{1}{2}f(2x)-1$



$y_1=f(2x)$

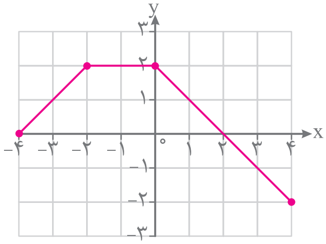


$y_2=\frac{1}{2}f(2x)$

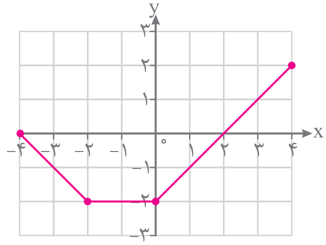


$y=\frac{1}{2}f(2x)-1$

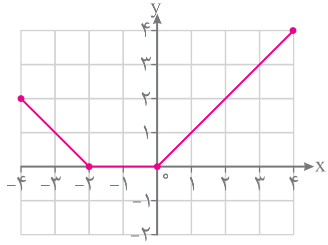
ب) $y=-f(-x)+2$



$y_1=f(-x)$

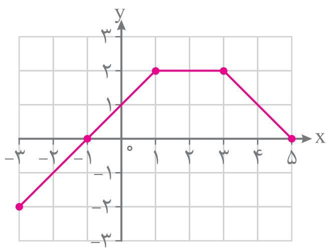


$y_2=-f(-x)$

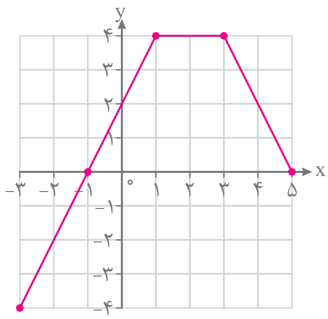


$y=-f(-x)+2$

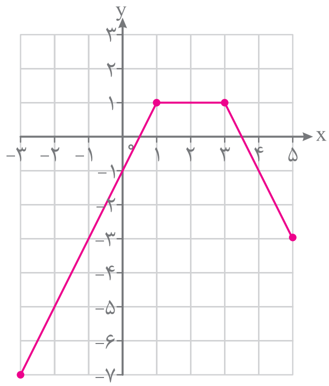
پ) $y=2f(x-1)-3$



$y_1=f(x-1)$

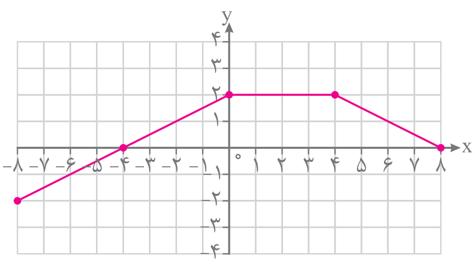


$y_2=2f(x-1)$

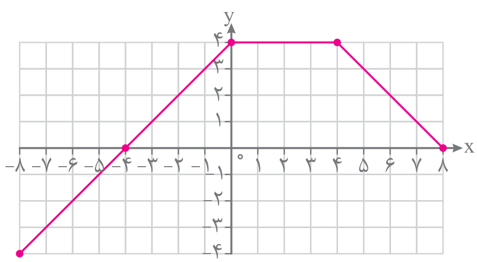


$y_3=2f(x-1)-3$

ت) $y=2f(\frac{1}{2}x)$



$y_1=f(\frac{1}{2}x)$



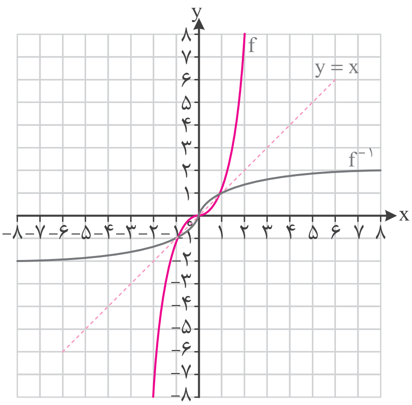
$y=2f(\frac{1}{2}x)$

درس سوم: تابع وارون

کار در کلاس صفحهٔ ۲۶ کتاب درسی

آیا تابع $f(x)=x^{3}$ یک‌به‌یک است؟ بله **چرا؟** چون هر خطی افقی (موازی محور xها) رسم کنیم، نمودار را در یک نقطه قطع می‌کند.

در دستگاه مختصات زیر نمودار تابع $f(x)=x^{3}$ و وارون آن را رسم کنید.



نمودار $f^{-1}(x)$ و $f(x)$ نسبت به خط $y=x$ متقارن هستند، بنابراین برای رسم وارون f کافی است نمودار f را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه کنیم.

ضابطهٔ تابع وارون چیست؟ برای محاسبهٔ ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ کافی است x را برحسب y محاسبه و در نهایت جای y و x را عوض کنیم.

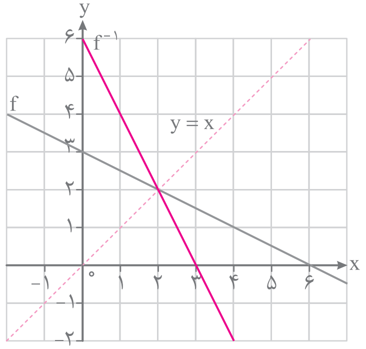
$$y=x^{3}\Rightarrow x=\sqrt[3]{y}\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$$

کار در کلاس صفحهٔ ۲۷ کتاب درسی

ضابطهٔ تابع وارون توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. دامنه و برد هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید.

الف) $f(x)=-\frac{1}{2}x+3$

$$y=-\frac{1}{2}x+3\Rightarrow \frac{1}{2}x=-y+3\Rightarrow x=-2y+6\Rightarrow f^{-1}(x)=-2x+6$$

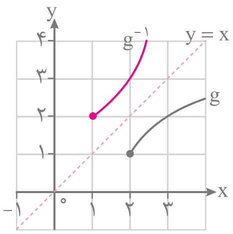


$D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

$R_f=\mathbb{R}\ ,\ R_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

ب) $g(x)=1+\sqrt{x-2}$

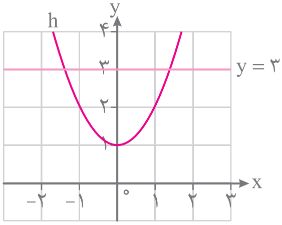
$$y=1+\sqrt{x-2}\Rightarrow \sqrt{x-2}=y-1\xrightarrow{y\geq 1}x-2=(y-1)^{2}\Rightarrow x=(y-1)^{2}+2\Rightarrow g^{-1}(x)=(x-1)^{2}+2$$



$D_g=[2,+\infty)\ ,\ D_{g^{-1}}=[1,+\infty)$

$R_g=[1,+\infty)\ ,\ R_{g^{-1}}=[2,+\infty)$

پ) $h(x)=x^2+1$



چون خطی افقی (برای مثال $y=3$) وجود دارد که نمودار $h(x)$ را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند، تابع $h(x)$ یک‌به‌یک نیست و در نتیجه وارون‌پذیر نیست.

$D_h=\mathbb{R}$

$R_h=[1,+\infty)$

پرسش‌متن صفحهٔ ۲۸ کتاب درسی

جواب منفی غیرقابل‌قبول است. (**چرا؟**) از آنجا که $x\in[1,+\infty)$ بنابراین $x-1\geq 0$ است. در نتیجه چون مقدار $-\sqrt{y-1}$ نامثبت است، تساوی $x-1=-\sqrt{y-1}$ برقرار نیست.

تمرین صفحهٔ ۲۹ کتاب درسی

۱ ضابطهٔ تابع وارون توابع یک‌به‌یک زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=\dfrac{-8x+3}{2}$

$$y=\frac{-8x+3}{2}\Rightarrow 2y=-8x+3\Rightarrow 8x=-2y+3\Rightarrow x=\frac{-2y+3}{8}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-2x+3}{8}$$

ب) $g(x)=-5-\sqrt{3x+1}$

$$y=-5-\sqrt{3x+1}\Rightarrow \sqrt{3x+1}=-y-5\xrightarrow[y\leq -5]{\text{طرفین به توان ۲}}(\sqrt{3x+1})^2=(-y-5)^2\Rightarrow 3x+1=y^2+10y+25$$

$$\Rightarrow 3x=y^2+10y+24\Rightarrow x=\frac{1}{3}(y^2+10y+24)\Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{1}{3}(x^2+10x+24)$$

۲ در مورد هر یک از قسمت‌های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

کافی است نشان دهیم ترکیب دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ برابر x است.

الف) $f(x)=\dfrac{-7}{2}x-3\quad,\quad g(x)=-\dfrac{2x+6}{7}$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(-\frac{2x+6}{7})=-\frac{7}{2}(-\frac{2x+6}{7})-3=\frac{2x+6}{2}-3=x+3-3=x$$

ب) $f(x)=-\sqrt{x-8}\quad,\quad g(x)=8+x^2;x\leq 0$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(8+x^2)=-\sqrt{8+x^2-8}=-\sqrt{x^2}=-|x|\overset{x\leq 0}{=}-(-x)=x$$

۳ رابطهٔ بین درجهٔ سانتی‌گراد و فارنهایت که برای اندازه‌گیری دما استفاده می‌شوند به صورت $f(x)=\frac{9}{5}x+32$ است که در آن x میزان درجهٔ سانتی‌گراد و $f(x)$ میزان درجهٔ فارنهایت است. $f^{-1}(x)$ را به دست آورده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می‌دهد.

$$y=\frac{9}{5}x+32\Rightarrow \frac{9}{5}x=y-32\Rightarrow 9x=5y-160\Rightarrow x=\frac{5}{9}y-\frac{160}{9}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{5}{9}x-\frac{160}{9}$$

$f^{-1}(x)$ رابطه‌ای است که درجهٔ فارنهایت را به درجهٔ سانتی‌گراد تبدیل می‌کند. (در آن x میزان درجهٔ فارنهایت و میزان $f^{-1}(x)$ درجهٔ سانتی‌گراد است.)

۴ توابع زیر یک‌به‌یک نیستند. با محدود کردن دامنهٔ آنها به دو روش متفاوت توابعی یک‌به‌یک بسازید.

الف) $f(x)=|x|$

اگر دامنهٔ تابع را به صورت بازه‌های $(-\infty\,,\,۰]$ یا $[۰\,,\,+\infty)$ محدود کنیم، تابع در آن بازه یک‌به‌یک می‌شود.

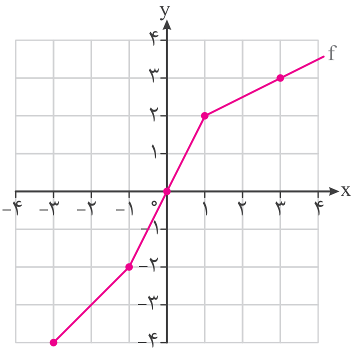
ب) $g(x)=-x^۲$

اگر دامنهٔ تابع را به صورت بازه‌های $(-\infty\,,\,۰]$ یا $[۰\,,\,+\infty)$ محدود کنیم، تابع در آن بازه یک‌به‌یک می‌شود.

پ) $h(x)=x^۲+۴x+۳=x^۲+۴x+۴-۱=(x+۲)^۲-۱$

اگر دامنهٔ تابع را به صورت بازه‌های $(-\infty\,,\,-۲]$ یا $[-۲\,,\,+\infty)$ محدود کنیم، تابع در آن بازه یک‌به‌یک می‌شود.

۵ از نمودار تابع f برای تکمیل جدول استفاده کنید.

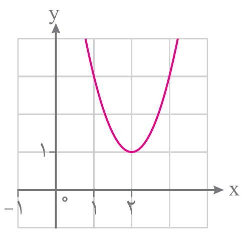


$$\text{از نمودار}\Rightarrow\begin{cases}(-۳,-۴)\in f\Rightarrow(-۴,-۳)\in f^{-۱}\Rightarrow f^{-۱}(-۴)=-۳\\(-۱,-۲)\in f\Rightarrow(-۲,-۱)\in f^{-۱}\Rightarrow f^{-۱}(-۲)=-۱\\(۱,۲)\in f\Rightarrow(۲,۱)\in f^{-۱}\Rightarrow f^{-۱}(۲)=۱\\(۳,۳)\in f\Rightarrow(۳,۳)\in f^{-۱}\Rightarrow f^{-۱}(۳)=۳\end{cases}$$

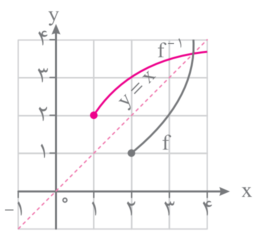
x	-۴	-۲	۲	۳
$f^{-۱}(x)$	-۳	-۱	۱	۳

۶ با محدود کردن دامنهٔ تابع $f(x)=x^۲-۴x+۵$، یک تابع یک‌به‌یک به دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

$f(x)=x^۲-۴x+۴+۱=(x-۲)^۲+۱$



نمودار $f(x)$ به صورت روبه‌روست که تابعی یک‌به‌یک نیست. می‌توان دامنهٔ تابع $f(x)$ را به بازهٔ $[۲\,,\,+\infty)$ محدود کرد تا تابع یک‌به‌یک به دست آید.



$$\begin{cases}D_f=[۲\,,\,+\infty)\\R_f=[۱\,,\,+\infty)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}D_{f^{-۱}}=[۱\,,\,+\infty)\\R_{f^{-۱}}=[۲\,,\,+\infty)\end{cases}$$

۷ اگر $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^۳$ ، مقادیر زیر را به دست آورید.

ابتدا ضابطه‌های $f^{-۱}(x)$ و $g^{-۱}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳\Rightarrow y=\frac{۱}{۸}x-۳\Rightarrow \frac{۱}{۸}x=y+۳\Rightarrow x=۸y+۲۴\Rightarrow f^{-۱}(x)=۸x+۲۴$$

$$g(x)=x^۳\Rightarrow y=x^۳\Rightarrow x=\sqrt[۳]{y}\Rightarrow g^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}$$

الف) $(fog)^{-۱}(۵)$

ابتدا $(fog)(x)$ را محاسبه می‌کنیم، سپس وارون آن را به دست می‌آوریم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^۳)=\frac{۱}{۸}x^۳-۳\Rightarrow y=\frac{۱}{۸}x^۳-۳\Rightarrow x^۳=۸y+۲۴\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۸y+۲۴}$$

$$\Rightarrow (fog)^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{۸x+۲۴}\Rightarrow (fog)^{-۱}(۵)=\sqrt[۳]{۸(۵)+۲۴}=\sqrt[۳]{۴۰+۲۴}=\sqrt[۳]{۶۴}=\sqrt[۳]{۴^۳}=۴$$

ب) $(f^{-۱}of^{-۱})(۶)$ $=f^{-۱}(f^{-۱}(۶))=f^{-۱}(۸(۶)+۲۴)=f^{-۱}(۷۲)=۸(۷۲)+۲۴=۶۰۰$

پ) $(g^{-۱}of^{-۱})(۵)$ $=g^{-۱}(f^{-۱}(۵))=g^{-۱}(۸(۵)+۲۴)=g^{-۱}(۶۴)=\sqrt[۳]{۶۴}=\sqrt[۳]{۴^۳}=۴$