فصل ۱: ماتریس و کاربردها

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

کار در کلاس .... صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی

اطلاعات مربوط به ۴ فروشگاه A ، B ، C و D در مورد تعداد شلوار، بلوز و پیراهن‌های موجود در هرفروشگاه، در جدول دوبعدی زیرآمده است. این اطلاعات را یک بار با یک ماتریس ۴×۳ و یک بار با ماتریسی ۳×۴ نمایش دهید.

فروشگاه A	۲۴ شلوار، ۱۵ بلوز و ۷ پیراهن
فروشگاه B	۲۶ شلوار، ۱۹ بلوز و ۱۱ پیراهن
فروشگاه C	۱۷ شلوار، ۲۸ بلوز و ۲۲ پیراهن
فروشگاه D	۱۲ شلوار، ۳۱ بلوز و ۳۵ پیراهن

$$M_{۴\times۳}=\begin{array}{c} \\ A\\ B\\ C\\ D\end{array}\begin{array}{c}\text{پیراهن بلوز شلوار}\\ \begin{bmatrix} ۲۴ & ۱۵ & ۷\\ ۲۶ & ۱۹ & ۱۱\\ ۱۷ & ۲۸ & ۲۲\\ ۱۲ & ۳۱ & ۳۵\end{bmatrix}\end{array}$$

$$M_{۳\times۴}=\begin{array}{c} \\ \text{شلوار}\\ \text{بلوز}\\ \text{پیراهن}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}A & B & C & D\end{array}\\ \begin{bmatrix} ۲۴ & ۲۶ & ۱۷ & ۱۲\\ ۱۵ & ۱۹ & ۲۸ & ۳۱\\ ۷ & ۱۱ & ۲۲ & ۳۵\end{bmatrix}\end{array}$$

کار در کلاس .... صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی

مانند نمونه ماتریس‌های A و B را در هر حالت با هم جمع یا تفریق کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & -۱\\ ۴ & ۵ & ۶ & -۱\\ ۷ & ۸ & ۹ & -۱\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix} -۱ & -۲ & -۳ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴\\ ۵ & ۶ & ۷ & ۸\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} ۱+(-۱) & ۲+(-۲) & ۳+(-۳) & (-۱)+۱\\ ۴+۱ & ۵+۲ & ۶+۳ & (-۱)+۴\\ ۷+۵ & ۸+۶ & ۹+۷ & (-۱)+۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۵ & ۷ & ۹ & ۳\\ ۱۲ & ۱۴ & ۱۶ & ۷\end{bmatrix}$$

الف) $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix} -۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow A-B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$

ب) $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ & ۷\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & -۱ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ & ۲ & ۱۱\end{bmatrix}$

پ) $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ & ۲\\ \sqrt{۲} & ۵ & -۱ & ۴\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۴ & -۷\\ ۱ & ۲ & ۳ & -۹\end{bmatrix}\Rightarrow A-B=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ & -۱ & ۹\\ \sqrt{۲}-۱ & ۳ & -۴ & ۱۳\end{bmatrix}$

ت) $A=[۵]\ ,\ B=[-۷]\Rightarrow A+B=[-۲]$

ث) دو ماتریس ۳×۳ و غیرصفر مثال بزنید که جمع آنها برابر با ماتریس صفر باشد.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰\\ ۳ & -۱ & ۴\\ ۵ & ۲ & ۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۱ & -۲ & ۰\\ -۳ & ۱ & -۴\\ -۵ & -۲ & -۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}=\bar{O}$$

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی

۱ در هر حالت طرف دوم تساوی‌های زیر را به دست آورید.

الف) $-1\times\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\-4&-5&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-2&-3\\-4&-5&-6\\4&5&6\end{bmatrix}$

ب) $\frac{1}{2}\times\begin{bmatrix}4&6&8&1\\0&3&5&7\\\sqrt{2}&-1&2&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&4&\frac{1}{2}\\0&\frac{3}{2}&\frac{5}{2}&\frac{7}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{-1}{2}&1&4\end{bmatrix}$

پ) $0\times\begin{bmatrix}1&2&-1\\-2&-3&-4\\5&6&7\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\bar{O}$

ت) $7\times\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\bar{O}$

۲ هر یک از ماتریس‌های زیر را به صورت ضرب یک عدد در یک ماتریس بنویسید.

$\begin{bmatrix}1&-1&-2\\3&1&4\\2&5&0\end{bmatrix}=(-1)\times\begin{bmatrix}-1&1&2\\-3&-1&-4\\-2&-5&0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}2&4&6\\8&4&2\\10&3&1\end{bmatrix}=2\times\begin{bmatrix}1&2&3\\4&2&1\\5&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی

۱ برای ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&1\\3&-1\end{bmatrix}$ و دو عدد حقیقی $r=3$ و $s=-2$ برقراری خاصیت (ج) را تحقیق کنید.

$$\left.\begin{array}{l}(3+(-2))\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}\\ 3A+(-2)A=\begin{bmatrix}3&6\\-3&9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&-4\\2&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow(r+s)A=rA+sA$$

$$\left.\begin{array}{l}(3-(-2))\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&10\\-5&15\end{bmatrix}\\ 3A-(-2)A=\begin{bmatrix}3&6\\-3&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2&-4\\2&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&10\\-5&15\end{bmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow(r-s)A=rA-sA$$

۲ درستی خاصیت (ج) را در حالت کلی ثابت کنید.

فرض کنیم $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس $m\times n$ باشد و r و s دو عدد حقیقی باشند، آنگاه:

$$(r\pm s)A=[(r\pm s)a_{ij}]=[ra_{ij}\pm sa_{ij}]=r[a_{ij}]\pm s[a_{ij}]=rA\pm sA$$

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی

یک ماتریس سطری ۱×۳ مانند A و یک ماتریس ستونی ۳×۱ مانند B طوری تعریف کنید که $A\times B=-۷$

$$A=[۱\ \ ۲\ \ ۱],\ B=\begin{bmatrix}-۱\\-۲\\-۲\end{bmatrix}\Rightarrow A\times B=[۱\ \ ۲\ \ ۱]\times\begin{bmatrix}-۱\\-۲\\-۲\end{bmatrix}=۱\times(-۱)+۲\times(-۲)+۱\times(-۲)=-۷$$

پرسش متن

صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی

آیا ضرب $(B\times A)$ امکان‌پذیر است؟ چرا؟

خیر، چون B یک ماتریس ۲×۳ و A یک ماتریس ۳×۳ است. تعداد ستون‌های ماتریس B با تعداد سطرهای ماتریس A برابر نیست. $B_{۲\times۲}\times A_{۳\times۳}\Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۸ و ۱۹ کتاب درسی

۱ برای هر حالت $A\times B$ و $B\times A$ را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $A=\begin{bmatrix}۱&-۱&۴\\۰&۰&۰\\۱&۲&۳\end{bmatrix}_{۳\times۳},\ B=\begin{bmatrix}۱&۲&۳&-۱\\-۱&۰&۱&-۲\\۳&۱&-۱&۰\end{bmatrix}_{۳\times۴}\Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix}۱۴&۶&-۲&۱\\۰&۰&۰&۰\\۸&۵&۲&-۵\end{bmatrix}_{۳\times۴}$

$B_{۳\times۴}\times A_{۳\times۳}\Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

ب) $A=\begin{bmatrix}۱&-۱\\۲&۱\\۳&-۲\end{bmatrix}_{۳\times۲},\ B=\begin{bmatrix}۲&-۱&۱\\۳&۰&۵\end{bmatrix}_{۲\times۳}\Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix}-۱&-۱&-۴\\۷&-۲&۷\\۰&-۳&-۷\end{bmatrix}_{۳\times۳},\quad B\times A=\begin{bmatrix}۳&-۵\\۱۸&-۱۳\end{bmatrix}_{۲\times۲}$

پ) $A=\begin{bmatrix}۱\\-۱\\۲\end{bmatrix}_{۳\times۱},\ B=[۲\ \ ۳\ \ ۴]_{۱\times۳}\Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix}۲&۳&۴\\-۲&-۳&-۴\\۴&۶&۸\end{bmatrix}_{۳\times۳},\ B\times A=[۷]=۷$

ت) $A=\begin{bmatrix}۱&-۱&۰\\۲&-۱&-۱\end{bmatrix}_{۲\times۳},\ B=\begin{bmatrix}-۱&۲&-۲\\-۱&۲&-۲\\-۱&۲&-۲\end{bmatrix}_{۳\times۳}\Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}_{۲\times۳}=\overline{O},\ B_{۳\times۳}\times A_{۲\times۳}\Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

قسمت (ت) را با این حکم در اعداد حقیقی، که «اگر $a\times b=۰$ آنگاه $a=۰$ یا $b=۰$» مقایسه کنید.

اگر حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی مساوی صفر باشد، آنگاه حداقل یکی از آنها صفر است امّا در ماتریس‌ها اگر حاصل‌ضرب دو ماتریس، صفر باشد، ممکن است که هیچ یک از ماتریس‌ها صفر نباشد. یعنی اگر $A\times B=\overline{O}$ آنگاه ممکن است $A\neq\overline{O}$ و $B\neq\overline{O}$.

۲ اگر A ماتریسی ۳×۵ باشد در این صورت در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید که $A\times B$ و $B\times A$ قابل تعریف است یا خیر و در صورت تعریف مرتبهٔ آن را بیابید:

الف) $B=[b_{ij}]_{۳\times۲}$

$A_{۳\times۵}\times B_{۳\times۲}\Rightarrow$ تعریف نمی‌شود. $B_{۳\times۲}\times A_{۳\times۵}\Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

ب) $B=[b_{ij}]_{۳\times۵}$

$A_{۳\times۵}\times B_{۳\times۵}\Rightarrow$ تعریف نمی‌شود. $B_{۳\times۵}\times A_{۳\times۵}\Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

پ) $B=[b_{ij}]_{۵\times ۳}$

$A_{۳\times ۵}\times B_{۵\times ۳}\Rightarrow$ تعریف می‌شود و مرتبهٔ ماتریس حاصل‌ضرب ۳×۳ است.

$B_{۵\times ۳}\times A_{۳\times ۵}\Rightarrow$ تعریف می‌شود و مرتبهٔ ماتریس حاصل‌ضرب ۵×۵ است.

ت) $B=[b_{ij}]_{۵\times ۴}$

$A_{۳\times ۵}\times B_{۵\times ۴}\Rightarrow$ تعریف می‌شود و مرتبهٔ ماتریس حاصل‌ضرب ۳×۴ است.

$B_{۵\times ۴}\times A_{۳\times ۵}\Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

ث) $B=[b_{ij}]_{۵\times ۵}$

$A_{۳\times ۵}\times B_{۵\times ۵}\Rightarrow$ تعریف می‌شود و مرتبهٔ ماتریس حاصل‌ضرب ۳×۵ است.

$B_{۵\times ۵}\times A_{۳\times ۵}\Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۹ و ۲۰ کتاب درسی

۱ فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۴ & -۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $(A\times B)$ و $(B\times A)$ را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$B\times A=\begin{bmatrix}۳ & -۱۴\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}\qquad A\times B=\begin{bmatrix}۱ & -۴\\ ۴ & ۴\end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم که $A\times B\neq B\times A$ و ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

نتیجه

در حالت کلّی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

۲ ماتریس اسکالر $I=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ را از چپ و راست در ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ ضرب کرده و حاصل‌ضرب‌ها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$\left.\begin{aligned}A\times I&=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\\ I\times A&=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\Rightarrow A\times I=I\times A=A$$

نتیجه می‌گیریم برای هر ماتریس مربعی A و ماتریس همانی هم‌مرتبه با A داریم: $A\times I=I\times A=A$

۳ اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۰ & -۱\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}_{۳\times ۲}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}_{۲\times ۲}$ و $C=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}_{۲\times ۲}$ در این صورت درستی تساوی $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$ را بررسی کنید.

$$\left.\begin{aligned}&B+C=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۴ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow A\times(B+C)=\begin{bmatrix}۱۰ & ۵\\ -۲ & -۳\\ ۰ & ۵\end{bmatrix}\\ &A\times B=\begin{bmatrix}۵ & ۵\\ ۱ & -۱\\ -۵ & ۰\end{bmatrix}_{۳\times ۲},A\times C=\begin{bmatrix}۵ & ۰\\ -۳ & -۲\\ ۵ & ۵\end{bmatrix}_{۳\times ۲}\Rightarrow (A\times B)+(A\times C)=\begin{bmatrix}۱۰ & ۵\\ -۲ & -۳\\ ۰ & ۵\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\Rightarrow A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$$

۴) با همان ماتریس‌های معرفی‌شده در شمارهٔ (۳) درستی تساوی زیر را بررسی کنید: $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

$$\left.\begin{array}{l} A\times(B\times C)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}\times\left(\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 9\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}5 & 20\\ -3 & -2\\ 5 & -5\end{bmatrix} \\ (A\times B)\times C=\begin{bmatrix}5 & 5\\ -1 & 1\\ 0 & -5\end{bmatrix}\times\left(\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}5 & 20\\ -3 & -2\\ 5 & -5\end{bmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$$

تمرین

صفحهٔ ۲۰ و ۲۱ کتاب درسی

۱) اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 4}$ ماتریسی 3×4 باشد به طوری که برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=7$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^2$ در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

$$A=\begin{bmatrix}7 & 1^2 & 1^2 & 1^2\\ 2+1 & 7 & 2^2 & 2^2\\ 3+1 & 3+2 & 7 & 3^2\end{bmatrix}_{3\times 4}=\begin{bmatrix}7 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 7 & 4 & 4\\ 4 & 5 & 7 & 9\end{bmatrix}$$

۲) اگر $A=\begin{bmatrix}2x-y & 5\\ z & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}3 & 2x+y\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ و $A=B$ در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

$$\begin{cases}2x-y=3\\ 2x+y=5\\ z=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\\ z=-2\end{cases}\Rightarrow x+y+z=2+1+(-2)=1$$

۳) دو ماتریس 3×3 مانند A و B مثال بزنید که $A\neq\overline{O}$ و $B\neq\overline{O}$ ولی $AB=\overline{O}$.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\neq\overline{O}\,,\ B=\begin{bmatrix}-2 & -2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\neq\overline{O}\Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\overline{O}$$

۴) با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلّی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ A\times C=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow A\times B=A\times C$$

اما $\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ یعنی $B\neq C$.

۵) اگر A ماتریسی مربعی باشد و توان‌های A را به صورت $A^2=AA$ و $A^3=AA^2$ و ... و $A^n=AA^{n-1}$ $(n\in\mathbb{N}\ n>1)$ در این صورت با فرض $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ حاصل A^2 و A^3 و A^7 را بیابید.

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad A^3=A\times A^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$A^7=A^3\times A^3\times A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

نکته

همواره داریم:
$$A=\begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b \end{bmatrix} \Rightarrow A^n=\begin{bmatrix} a^n & ۰ \\ ۰ & b^n \end{bmatrix}$$

۶ اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد.

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۴+۳a & -۸+۲a \\ b-۳ & -۲b-۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -۸+۲a=۰ \Rightarrow a=۴ \\ b-۳=۰ \Rightarrow b=۳ \end{cases} \Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix} ۱۶ & ۰ \\ ۰ & -۸ \end{bmatrix}$$

۷ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۳}$ به صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا A و B را با درایه‌هایشان نوشته و سپس $A\times B$ و $B\times A$ را به دست آورید.

$$a_{ij}=\begin{cases} i^۲-۱ & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases} \quad , \quad b_{ij}=\begin{cases} i^۲+۱ & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+۲ & i<j \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} ۱^۲-۱ & ۲-۱ \\ ۲-۱ & ۲^۲-۱ \\ ۳-۱ & ۳-۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} ۱^۲+۱ & ۱-۲+۲ & ۱-۳+۲ \\ ۲+۱ & ۲^۲+۱ & ۲-۳+۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۵ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۱ \\ ۱۱ & ۱۶ & ۳ \\ ۷ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}, B\times A=\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ ۷ & ۱۹ \end{bmatrix}$$

۸ اگر $A=\begin{bmatrix} r_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & r_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & r_۳ \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری باشد و B ماتریسی ۳×۳ و دلخواه باشد در این صورت ماتریس $(A\times B)$ را تشکیل دهید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$A\times B=\begin{bmatrix} r_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & r_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & r_۳ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ar_۱ & br_۱ & cr_۱ \\ dr_۲ & er_۲ & fr_۲ \\ gr_۳ & hr_۳ & kr_۳ \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم اگر بخواهیم ماتریس قطری $A_{n\times n}$ را در ماتریس دلخواه $B_{n\times n}$ ضرب کنیم، کافی است به‌ازای هر i، درایهٔ a_{ii} را در سطر iام ماتریس B ضرب کنیم.

۹ اگر A ماتریسی ۳×۳ و اسکالر باشد و B ماتریسی هم‌مرتبهٔ A در این صورت

الف) برای $A\times B$ و $B\times A$ قوانینی تعریف کنید.

فرض کنیم $A=rI_۳$ یک ماتریس اسکالر و B یک ماتریس ۳×۳ باشد. آنگاه $A\times B$ به صورت $A\times B=(rI_۳)\times B=rB$ است؛ یعنی تمام درایه‌های B در عدد حقیقی r ضرب می‌شود.

ب) آیا تساوی $A\times B=B\times A$ برقرار است؟ بله، برقرار است.

$$A=\begin{bmatrix} r & 0 & 0\\ 0 & r & 0\\ 0 & 0 & r\end{bmatrix}=rI_3\ ,\ B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A\times B=rI_3\times B=r(I_3\times B)=rB=\begin{bmatrix} rb_{11} & rb_{12} & rb_{13}\\ rb_{21} & rb_{22} & rb_{23}\\ rb_{31} & rb_{32} & rb_{33}\end{bmatrix}\\ B\times A=B\times(rI_3)=r(B\times I_3)=rB=\begin{bmatrix} rb_{11} & rb_{12} & rb_{13}\\ rb_{21} & rb_{22} & rb_{23}\\ rb_{31} & rb_{32} & rb_{33}\end{bmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow A\times B=B\times A$$

۱۰ **اگر A و B ماتریس‌های ۳×۳ و تعویض‌پذیر باشند $(A\times B=B\times A)$ ثابت کنید.**

الف) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$: $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+\underbrace{\cancel{BA}}_{AB}+B^2=A^2+2AB+B^2$

ب) $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$: $(A-B)(A+B)=A^2+AB-\underbrace{\cancel{BA}}_{AB}-B^2=A^2-B^2$

۱۱ **اگر $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$ مفروض باشد، حاصل A^3 را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟**

$$A^2=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 16\end{bmatrix}\Rightarrow A^3=\begin{bmatrix} -8 & 0 & 0\\ 0 & 27 & 0\\ 0 & 0 & 64\end{bmatrix}\Rightarrow A^3=\begin{bmatrix} (-2)^3 & 0 & 0\\ 0 & 3^3 & 0\\ 0 & 0 & 4^3\end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم هرگاه یک ماتریس قطری به توان یک عدد برسد، ماتریس حاصل یک ماتریس قطری است و درایه‌های روی قطر آن، با توان رساندن درایه‌های روی قطر اصلیِ ماتریس اولیه به دست می‌آید.

نکته

اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ یک ماتریس قطری باشد، در این صورت $A^n=\left[a_{ij}^n\right]_{n\times n}$.

درس دوم: وارون ماتریس و دترمینان

پرسش متن صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی

آیا دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ وارون یکدیگرند؟ خیر **چرا؟** زیرا:

$$A\times B=\begin{bmatrix} 1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\neq I$$

پرسش متن صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی

اگر $A=\begin{bmatrix} 3 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}$ مفروض باشد ماتریس $(A^{-1})^{-1}$ را بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=2\times4-1\times3=5\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{۴}{۵} & -\frac{۳}{۵}\\ -\frac{۱}{۵} & \frac{۲}{۵}\end{bmatrix}\Rightarrow |A^{-1}|=\frac{۴}{۵}\times\frac{۲}{۵}-[(-\frac{۱}{۵})\times(-\frac{۳}{۵})]=\frac{۵}{۲۵}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow (A^{-1})^{-1}=\frac{۱}{\frac{۱}{۵}}\begin{bmatrix}\frac{۲}{۵} & \frac{۳}{۵}\\ \frac{۱}{۵} & \frac{۴}{۵}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم: $(A^{-1})^{-1}=A$

مثال صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی

وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱۰ & ۲\\ ۴ & ۱\end{bmatrix}$ را به دست آورید.

چون $|A|=۲\neq ۰$ پس A دارای وارون است (وارون‌پذیر است) و داریم

$$A^{-1}=\frac{۱}{۲}\times\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ -۴ & ۱۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -۱\\ -۲ & ۵\end{bmatrix}$$

پاسخ به‌دست‌آمده را امتحان کنید.

$$\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -۱\\ -۲ & ۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱۰ & ۲\\ ۴ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}\times A=I$$

فعالیت صفحهٔ ۲۴ کتاب درسی

دستگاه $\begin{cases}۲x+y=۴\\ ۷x+۴y=۱۵\end{cases}$ را در نظر بگیرید. می‌توان از ماتریس‌ها کمک گرفت و دستگاه را به صورت یک تساوی ماتریسی نوشت:

$$\begin{bmatrix}۲x+y\\ ۷x+۴y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴\\ ۱۵\end{bmatrix}\quad (۱)$$

از طرفی با توجه به تعریف ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$\begin{bmatrix}۲x+y\\ ۷x+۴y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۷ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\quad (۲)$$

$$(۱)\text{ و }(۲)\Rightarrow\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۷ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴\\ ۱۵\end{bmatrix}$$

معادلهٔ ماتریسی اخیر معادل با دستگاه دو معادله و دو مجهولِ مفروض است.

۱) حال اگر فرض کنیم $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۷ & ۴\end{bmatrix}$ (A را ماتریس ضرایب می‌نامیم) در این صورت اولاً نشان دهید ماتریس A وارون دارد (وارون‌پذیر است) و در ثانی A^{-1} را بیابید.

$|A|=(۲\times۴)-(۱\times۷)=۱\neq ۰\Rightarrow$ وارون‌پذیر است. $A\Rightarrow A^{-1}=\frac{۱}{|A|}\times\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ -۷ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ -۷ & ۲\end{bmatrix}$

۲) معادلهٔ ماتریسی معادل با دستگاه را از سمت چپ در A^{-1} ضرب کنید و با توجه به تعریف تساوی بین دو ماتریس، جواب دستگاه یعنی x و y را بیابید.

$$\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ -۷ & ۲\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۷ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ -۷ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\ ۱۵\end{bmatrix}$$

$$\text{شرکت‌پذیری}\Rightarrow\left(\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ -۷ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۷ & ۴\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\ y=۲\end{cases}$$

پرسش متن ------ صفحهٔ ۲۵ کتاب درسی

دستگاه معادلات $\begin{cases}2x-y=4\\-4x+2y=2\end{cases}$ **را در نظر بگیرید. آیا می‌توانید از ماتریس وارون برای حل این دستگاه استفاده کنید؟**

$$\underbrace{\begin{bmatrix}2 & -1\\-4 & 2\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$$

ماتریس A وارون ندارد، چون $|A|=0$ است و نمی‌توان از آن برای حل دستگاه استفاده کرد.

این دو خط نسبت به هم چگونه‌اند؟ این دو خط موازی‌اند و دستگاه جواب ندارد.

پرسش متن ------ صفحهٔ ۲۵ کتاب درسی

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{2} & \frac{4}{2}\\\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{تعریف تساوی ماتریس‌ها}}\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$$

کار در کلاس ------ صفحهٔ ۲۶ کتاب درسی

دستگاه معادلات $\begin{cases}2x-3y=3\\-4x+6y=1\end{cases}$ **را در نظر بگیرید.**

۱) هریک از معادلات دستگاه معادلهٔ یک خط در صفحه است. شیب هریک از این دو خط را معلوم کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

شیب خط اول $\frac{2}{3}$ و شیب خط دوم $\frac{2}{3}$ است و دو خط موازی هستند.

آیا این دو خط بر هم منطبق هستند؟ خیر، دو خط منطبق نیستند، زیرا: $\frac{2}{-4}=\frac{-3}{6}\neq\frac{3}{1}\Rightarrow\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

۲) ماتریس ضرایب دستگاه را تشکیل دهید، آیا این ماتریس وارون‌پذیر است؟ خیر **چرا؟** زیرا دترمینان ماتریس ضرایب صفر است.

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3\\-4 & 6\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=(2\times6)-[(-3)\times(-4)]=0$$

۳) سؤال‌های ۱ و ۲ را در مورد دستگاه $\begin{cases}x-3y=2\\-3x+9y=-6\end{cases}$ **پاسخ داده و اگر A ماتریس ضرایب یک دستگاه باشد و $|A|=0$ برای تعداد جواب‌های آن دستگاه دو حالت نتیجه بگیرید.**

شیب خط اول $\frac{1}{3}$ و شیب خط دوم $\frac{1}{3}$ است، پس دو خط موازی هستند. از طرفی $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$، پس دو خط منطبق هستند.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3\\-3 & 9\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=9-9=0\Rightarrow$$ ماتریس وارون‌پذیر نیست.

نتیجه: اگر $|A|=0$ باشد، دو حالت امکان دارد:

الف) دو خط موازی‌اند، دستگاه جواب ندارد.

ب) دو خط منطبق‌اند و دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

پرسش متن ------ صفحهٔ ۲۸ کتاب درسی

دترمینان ماتریس زیر را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 2\\-1 & 1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1 & 5\\2 & 11\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & -3\\1 & 5\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-3 & 4+2\\-(11-10) & 10+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 6\\-1 & 13\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=13+6=19$$

پرسش متن

صفحهٔ ۲۹ کتاب درسی

اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در این صورت اعداد حقیقی a، b، c و d را چنان بیابید که تساوی $|A|^2-5|A|+6=0$ برقرار باشد.

$$|A|^2-5|A|+6=0 \Rightarrow (|A|-2)(|A|-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} |A|=2 \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ |A|=3 \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

دقت شود که برای ماتریس A بی‌شمار جواب وجود دارد.

کار در کلاس

صفحهٔ ۲۹ و ۳۰ کتاب درسی

۱ ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس $A\times B$ را به دست آورده و برقراری تساوی $|AB|=|A||B|$ را بررسی کنید.

$$\left.\begin{array}{l} A\times B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 25 & 11 \end{bmatrix} \Rightarrow |A\times B|=22-0=22 \\ |A|=11, |B|=2 \Rightarrow |A||B|=11\times 2=22 \end{array}\right\} \Rightarrow |AB|=|A||B|$$

۲ ماتریسی 3×3 چون A بنویسید طوری که $|A|=-6$، سپس ماتریس A^2 را محاسبه و $|A^2|$ را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$\left.\begin{array}{l} A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=2\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}-(0)\times\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+(0)\times\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=-6 \\ A^2=A\times A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ |A^2|=4\begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}-(0)\times\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+(0)\times\begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=36 \end{array}\right\} \Rightarrow |A|^2=(-6)^2=36=|A^2|$$

نتیجه می‌گیریم برای هر ماتریس مربعی 3×3 داریم: $|A^2|=|A|^2$

۳ اگر $A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ در این صورت $|A|$ را برحسب سطر اول یا دستور ساروس محاسبه کنید و عدد حاصل را با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطرِ اصلی A، مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

برحسب بسط سطر اول:

$$|A|=a\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix}-(0)\times\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix}+(0)\times\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=abc$$

برحسب دستور ساروس:

$$A=\left[\begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{array}\right]\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & b \\ 0 & 0 \end{array} \Rightarrow |A|=(abc)-(0)=abc$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم، دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی آن.

نتیجه

۱- دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی آن.

۲- دترمینان ماتریس مربعی صفر، صفر است.

۴ اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و داشته باشیم $A=4\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{5}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{5}{2}\end{bmatrix}$ در این صورت $|A|$ را به دست آورید.

$$A=4\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{5}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{5}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=2\times 5\times 10=100$$

پرسش متن صفحهٔ ۳۰ کتاب درسی

اگر A ماتریسی ۳×۳ و اسکالر باشد و $a_{11}=4$ در این صورت $|A|$ را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=4^3=64$$

تمرین صفحهٔ ۳۰ و ۳۱ کتاب درسی

۱ اگر $A=[1\ \ 2\ \ -3]$ و $B=\begin{bmatrix}-2\\ -1\\ 3\end{bmatrix}$ در این صورت $|AB|$ و $|BA|$ را به دست آورید.

$$AB=[-13]\Rightarrow |AB|=-13$$

$$BA=\begin{bmatrix}-2 & -4 & 6\\ -1 & -2 & 3\\ 3 & 6 & -9\end{bmatrix}\Rightarrow |BA|=-2\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 6 & -9\end{vmatrix}-(-4)\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 3 & -9\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 3 & 6\end{vmatrix}=-2(0)+4(0)+6(0)=0$$

۲ اگر $A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 1 & 0 & -5\end{bmatrix}$ در این صورت $|A^2|$ را به دست آورید.

$$|A|=(-2)\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 0 & -5\end{vmatrix}-(0)\times\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & -5\end{vmatrix}+(0)\times\begin{vmatrix}0 & -3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=(-2)(15)+0+0=-30\Rightarrow |A^2|=|A|^2=(-30)^2=900$$

۳ اگر $A=\begin{bmatrix}5|A| & |A|\\ 5 & 4|A|^2\end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $\left(-2|A|^3\right)$ را بیابید.

$$|A|=(5|A|)(4|A|^2)-5(|A|)\Rightarrow 20|A|^3-6|A|=0$$

$$|A|(20|A|^2-6)=0\Rightarrow\begin{cases}|A|=0\\ |A|=\pm\sqrt{\frac{6}{20}}=\pm\frac{\sqrt{30}}{10}\end{cases}$$

$$|A|^{۳}-۲=\begin{cases}-۲ & |A|=۰\\ \dfrac{۳۰\sqrt{۳۰}-۲۰۰۰}{۱۰۰۰} & |A|=\dfrac{\sqrt{۳۰}}{۱۰}\\ \dfrac{-۳۰\sqrt{۳۰}-۲۰۰۰}{۱۰۰۰} & |A|=-\dfrac{\sqrt{۳۰}}{۱۰}\end{cases}$$

۴) دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&b&c\\a&b&c\\d&e&f\end{bmatrix}$ را برحسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$|A|=d\begin{vmatrix}b&c\\b&c\end{vmatrix}-e\begin{vmatrix}a&c\\a&c\end{vmatrix}+f\begin{vmatrix}a&b\\a&b\end{vmatrix}=d(bc-bc)-e(ac-ac)+f(ab-ab)=d(۰)-e(۰)+f(۰)=۰$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم هرگاه دو سطر ماتریس ۳×۳ با هم برابر باشد، دترمینان آن ماتریس صفر است.

۵) ماتریسی ۳×۳ چون A بیابید که $|A|=۳$.

$$A=\begin{bmatrix}۳&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=۳\times۱\times۱=۳$$

۶) اگر $A=\begin{bmatrix}۳&۴\\۵&۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۳&-۲\\-۱&۵\end{bmatrix}$ حاصل عبارت $(۲A^{-۱}-۳B^{-۱})$ را بیابید.

$$|A|=۲۰-۶=۱۴\,,\,|B|=۲+۱۵=۱۷ \qquad A^{-۱}=\frac{۱}{۱۴}\begin{bmatrix}۵&-۳\\-۲&۴\end{bmatrix},\,B^{-۱}=\frac{۱}{۱۷}\begin{bmatrix}-۱&۳\\-۵&-۲\end{bmatrix}$$

$$۲A^{-۱}-۳B^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۵}{۷}&\frac{-۳}{۷}\\\frac{-۲}{۷}&\frac{۴}{۷}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{-۳}{۱۷}&\frac{۹}{۱۷}\\\frac{-۱۵}{۱۷}&\frac{-۶}{۱۷}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱۰۶}{۱۱۹}&\frac{-۱۱۴}{۱۱۹}\\\frac{۷۱}{۱۱۹}&\frac{۱۱۰}{۱۱۹}\end{bmatrix}$$

۷) اگر $A=\begin{bmatrix}۲&۵\\۲&۳\end{bmatrix}$ ابتدا ماتریس $A^{-۱}$ را به دست آورده و $|A|$ را با $|A^{-۱}|$ مقایسه کنید.

$$\left.\begin{array}{l}|A|=۱۰-۶=۴\\ A^{-۱}=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix}۲&-۲\\-۳&۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}&-\frac{۱}{۲}\\\frac{-۳}{۴}&\frac{۵}{۴}\end{bmatrix}\Rightarrow|A^{-۱}|=(\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۴})-\left[(-\frac{۱}{۲})\times(-\frac{۳}{۴})\right]=\frac{۱}{۴}\end{array}\right\}\Rightarrow|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$$

۸) الف) ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}ka&kb&kc\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید و $|A|$ و $|B|$ را از دستور ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$A=\left[\begin{array}{ccc}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{array}\right]\begin{array}{cc}a&b\\d&e\\g&h\end{array}\Rightarrow|A|=(aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)$$

$$B=\left[\begin{array}{ccc}ka&kb&kc\\d&e&f\\g&h&i\end{array}\right]\begin{array}{cc}ka&kb\\d&e\\g&h\end{array}\Rightarrow|B|=(kaei+kbfg+kcdh)-(kceg+kafh+kbdi)$$

$$|B|=k[(aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)]=k|A|$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم اگر تمام درایه‌های یک سطر ماتریس مربعی A را در یک عدد حقیقی مانند k ضرب کنیم، دترمینان ماتریس جدید، همان دترمینان ماتریس قبلی است که در عدد k ضرب می‌شود.

ب) قسمت (الف) را برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix}$ بررسی کنید.

$$|A|=ad-bc\,,\,|B|=kad-kbc=k(ad-bc)=k|A|\Rightarrow |B|=k|A|$$

۹) برای ماتریس ۲×۲ مانند A دو مقدار |A| و |KA| را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=ad-bc$$

$$KA=\begin{bmatrix} Ka & Kb \\ Kc & Kd \end{bmatrix}\Rightarrow |KA|=K^{۲}ad-K^{۲}bc=K^{۲}(ad-bc)\Rightarrow |KA|=K^{۲}|A|$$

نتیجه می‌گیریم اگر تمام درایه‌های یک ماتریس ۲×۲ در عدد حقیقی K ضرب شود، دترمینان ماتریس حاصل، همان دترمینان ماتریس قبلی است که در $K^{۲}$ ضرب می‌شود.

نکته

اگر A_n، ماتریس مربعی و k عددی حقیقی باشد، در این صورت: $|kA|=k^n|A|$

۱۰) اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و $|A|=۵$ در این صورت حاصل $||A|A|$ را بیابید.

با توجه به نکتهٔ بالا خواهیم داشت:
$$\|\underbrace{A|}_{\text{عدد}}A|=|A|^{۳}|A|=|A|^{۴}=۵^{۴}=۶۲۵$$

۱۱) دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

$$\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱۰ \end{bmatrix}\Rightarrow \begin{cases} ۳x-۵y=۱ \\ ۴x+۲y=۱۰ \end{cases}\xrightarrow{|A|=۲۶}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}\Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ y=۱ \end{cases}$$

۱۲) به‌ازای چه مقادیری از k دستگاه $\begin{cases} kx+۳y=۴ \\ x-۲y=۳ \end{cases}$ یک دسته جواب منحصربه‌فرد دارد.

$$A=\begin{bmatrix} k & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=-۲k-۳\neq ۰\Rightarrow k\neq -\frac{۳}{۲}$$

۱۳) روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های هر یک از دستگاه‌های زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

الف) $\begin{cases} ۳x-۵y=-۱ \\ ۲x+y=۸ \end{cases}$

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۱۳\neq ۰\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}\Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ y=۲ \end{cases}\Rightarrow$$ دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

ب) $\begin{cases} x+۳y=۵ \\ -۲x-۶y=۱ \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۲ & -۶ \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=-۶+۶=۰ \\ \dfrac{۱}{-۲}=\dfrac{۳}{-۶}\neq\dfrac{۵}{۱} \Rightarrow \dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ خط‌ها موازی‌اند و دستگاه جواب ندارد.

پ) $\begin{cases} -۲x+۳y=۲ \\ ۴x-۶y=-۴ \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} A=\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ ۴ & -۶ \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=۱۲-۱۲=۰ \\ \dfrac{-۲}{۴}=\dfrac{۳}{-۶}=\dfrac{۲}{-۴} \Rightarrow \dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ خط‌ها منطبق‌اند و دستگاه بی‌شمار جواب دارد.