



ریاضی و آمار (۲)

فصل ۱: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

درس اول: گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

فعالیت

صفحه ۲ و ۳ کتاب درسی

۱) کدام یک از جملات زیر گزاره است؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید.

الف) شما چند سال دارید؟ گزاره نیست.

ب) عدد ۲ عددی اول است. گزاره است و دارای ارزش درست است.

پ) عدد $\sqrt{2}$ عددی گویا است. گزاره است و ارزش آن نادرست است.

ت) افلاطون شاگرد ارسطو است. گزاره است و ارزش آن نادرست است.

ث) $2+3 \times 4 = 20$: گزاره است و ارزش آن نادرست است.

ج) عدد $(-1)^n$ عددی همواره مثبت است. گزاره است و ارزش آن نادرست است.

چ) سیب قرمز از سیب زرد خوش‌مزه‌تر است. گزاره نیست.

ح) لطفاً تخته را پاک کن. گزاره نیست.

۲) دو گزاره درست و دو گزاره نادرست بیان کنید و همچنین دو جمله بنویسید که گزاره نباشند.

عبارت‌هایی مثل «عدد ۳۰ مضرب عددهای اول ۲، ۳ و ۵ است»، «می‌توان معادله درجه دومی ساخت که دارای دو ریشه حقیقی باشد» و... گزاره‌هایی با ارزش درست هستند.

عبارت‌هایی مثل «مربع پنج ضلع دارد»، «انقلاب اسلامی ایران در سال ۱۳۶۰ به پیروزی رسید» و... گزاره‌هایی با ارزش نادرست هستند.

عبارت‌هایی مانند «سعدی شاعر بسیار توانایی است»، «خدا حافظان باشد» و... گزاره نیستند.

صفحه ۳ کتاب درسی

پرسش متن

در منطق ریاضی و در جبر گزاره‌ها هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی مانند p یا q یا r یا... نمایش می‌دهیم. در سه جدول زیر (صفحه ۳ کتاب درسی) وضعیت ارزشی یک، دو و سه گزاره مشخص شده است. شما جدولی را برای نمایش وضعیت ارزشی چهار گزاره تشکیل دهید.

p	q	r	s	p	q	r	s
د	د	د	د	ن	د	د	د
د	د	د	ن	ن	د	د	ن
د	د	ن	د	ن	د	ن	د
د	د	ن	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	د	د	ن	ن	د	د
د	ن	د	ن	ن	ن	د	ن
د	ن	ن	د	ن	ن	ن	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

$2^4 = 16 =$ تعداد حالت‌های ارزشی چهار گزاره



کار در کلاس

صفحه ۴ کتاب درسی

در هر یک از حالت‌های زیر نقیض گزاره را بیان کنید؛ سپس، ارزش هر یک را مشخص کنید.
الف) عدد ۵ زوج است.

نقیض گزاره: عدد ۵ زوج نیست. ← یک گزاره درست است.

ب) تساوی « $2 \times 2 = 4$ » برقرار است.

نقیض گزاره: تساوی « $2 \times 2 = 4$ » برقرار نیست. ← یک گزاره نادرست است.

پ) عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک‌تر است.

نقیض گزاره: عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک‌تر نیست. ← یک گزاره نادرست است.

ت) ارسطو شاگرد افلاطون است.

نقیض گزاره: ارسطو شاگرد افلاطون نیست. ← یک گزاره نادرست است.

ث) ایران در منطقه غرب آسیا قرار دارد.

نقیض گزاره: ایران در منطقه غرب آسیا قرار ندارد. ← یک گزاره نادرست است.

ج) $(3 \times 7) > (5 \times 4)$

نقیض گزاره: $(3 \times 7) \leq (5 \times 4)$ ← یک گزاره درست است.

پرسش متن

صفحه ۴ کتاب درسی

گزاره «عدد ۳ فرد است و ۷ عددی اول است» را در نظر بگیرید. چه استنباطی نسبت به درستی یا نادرستی این گزاره دارید؟ با توجه به اینکه ارزش هر دو گزاره «عدد ۳ فرد است.» و «۷ عددی اول است.» درست است، ارزش گزاره ترکیبی درست است. نسبت به صدق و کذب گزاره «افلاطون شاگرد ارسطو است و عدد ۴ زوج است»، چه استنباطی دارید؟ کاملاً واضح است که صدق یک گزاره مرکب که از ترکیب دو گزاره ساده با لفظ یا حرف ربط «و» تشکیل شده است، درستی هر دو گزاره را طلب می‌کند. به نظر شما گزاره دومی چه ارزشی دارد؟ با توجه به اینکه ارزش گزاره «افلاطون شاگرد ارسطو است.» نادرست است، بدون توجه به درستی یا نادرستی ارزش گزاره «عدد ۴ زوج است.»، می‌توان گفت ارزش گزاره ترکیبی نادرست است.

فعالیت

صفحه ۵ کتاب درسی

در جدول زیر روبه‌روی گزاره‌های داده ارزش آنها را با علامت ✓ مشخص کرده و نیز با توجه به ارزش داده شده با یک گزاره ساده، گزاره مرکب را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	هفته هفت روز دارد و ماه شهریور ۳۱ روز دارد.	✓	
۲	قرآن دارای ۳۰ جزء است و همه سوره‌های آن با بسم‌الله شروع می‌شود.		✓
۳	۴ عددی اول است و ۸ زوج است.		✓
۴	کتاب قرآن ۱۱۴ سوره دارد و یکی از سوره‌های آن با بسم‌الله شروع نمی‌شود.	✓	
۵	۵۷ عددی اول است و ۲ عددی اول نیست.		✓
۶	$5 > 2$ و $\sqrt{3}$ عددی گویاست.		✓



پرسش متن صفحه ۵ کتاب درسی

اگر شخصی به شما بگوید: «آن حیوان، پرنده است یا مهره‌دار است»؛ صدق گفته او را در چه صورتی تأیید می‌کنید؟ در صورتی که حداقل ارزش یکی از گزاره‌ها درست باشد، ارزش کل گزاره ترکیبی درست است. اگر پس از بررسی معلوم شود که حیوان مورد نظر نه پرنده بوده است و نه از تیره مهره‌داران بوده است، آیا گزاره مذکور دارای ارزش درست بوده است؟ خیر

فعالیت صفحه ۶ کتاب درسی

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	عدد ۴ عددی فرد یا عددی اول است.		✓
۲	حضرت مهدی (عج) امام دوازدهم شیعیان است یا فرزند امام محمد تقی است.	✓	
۳	۹۱ عددی مرکب است یا $\sqrt{3}$ عددی گنگ است.	✓	
۴	زکریای رازی کاشف الکلی نیست یا افلاطون نویسنده کتاب ارغنون است.		✓
۵	عدد ۷ زوج است یا ۲.۳.۴.	✓	

فعالیت صفحه ۷ کتاب درسی

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۷ زوج است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.	✓	
۲	اگر ۹ مربع کامل است، آنگاه $\sqrt{9}$ مربع کامل است.		✓
۳	اگر ۲۹ اول است، آنگاه ۲ زوج است.	✓	
۴	اگر ۲.۵ مضرب ۵ است، آنگاه ۳.۵ عددی فرد است.		✓
۵	اگر ۲۵ بر ۵ بخش پذیر است، آنگاه ۳ عددی فرد است.	✓	
۶	اگر ۷ فرد است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.	✓	
۷	اگر ۱۰ فرد است، آنگاه ۹۹ اول است.	✓	

کار در کلاس صفحه ۷ کتاب درسی

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، در این صورت مانند نمونه، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان، مشخص کنید:

$$1) (q \Rightarrow p) \wedge r$$

ارزش گزاره $(q \Rightarrow p)$ به انتفای مقدم درست بوده و لذا ارزش گزاره $(q \Rightarrow p) \wedge r$ به ارزش گزاره r بستگی دارد.

۲) $(p \vee q) \vee r$

p گزاره‌ای درست است، بنابراین با توجه به اینکه ترکیب فصلی یک گزاره درست با هر گزاره‌ای، دارای ارزش درست است، ارزش گزاره $p \vee q$ و در نتیجه ارزش گزاره $(p \vee q) \vee r$ ، درست است.

۳) $(p \Rightarrow q) \wedge r$

p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست است، در نتیجه ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ و ترکیب عطفی آن با هر گزاره دیگری نادرست است. بنابراین ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge r$ نادرست است.

۴) $(r \Rightarrow p) \vee q$

p گزاره‌ای درست است، بنابراین ارزش گزاره شرطی $r \Rightarrow p$ درست است. پس ارزش گزاره $(r \Rightarrow p) \vee q$ نیز درست است.

۵) $(r \Rightarrow p) \Rightarrow q$

q گزاره‌ای نادرست و ارزش گزاره $(r \Rightarrow p)$ درست است، بنابراین ارزش گزاره $(r \Rightarrow p) \Rightarrow q$ نادرست خواهد بود.

۶) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

ارزش گزاره $(p \Rightarrow q)$ نادرست است، بنابراین گزاره $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ به انتفای مقدم دارای ارزش درست است.

۷) $(p \wedge q) \Rightarrow r$

p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست است، بنابراین ارزش گزاره $(p \wedge q)$ نادرست است و گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow r$ به انتفای مقدم دارای ارزش درست است.

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید.

صفحه ۸ کتاب درسی

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۲ فرد است، آنگاه ۸ عددی اول است و برعکس.	✓	
۲	اگر دو عدد فرد باشند آنگاه مجموع آنها زوج است و برعکس.		✓
۳	عدد ۱۱۹. جد اقل بردو عدد طبیعی. بخش پذیر است، اگر و تنها اگر ۱۱۹ عددی مرکب است.	✓	
۴	اگر ۲ زوج است آنگاه ۵ بر ۲ بخش پذیر است و برعکس.		✓
۵	یک چهارضلعی مربع است، اگر و تنها اگر آن چهارضلعی لوزی باشد.		✓
۶	اگر واریانس داده‌ها برابر صفر باشد؛ آنگاه داده‌ها با یکدیگر برابرند و برعکس.	✓	



کار در کلاس

صفحه ۹ کتاب درسی

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، مانند نمونه، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید:

۱۴۴

ارزش گزاره دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ تنها در صورتی درست است که دو گزاره p و q هم‌ارزش باشند؛ یعنی $p \equiv q$ (ارزش هر دو گزاره درست یا نادرست باشد).

$$۱) (p \Leftrightarrow q) \wedge r$$

گزاره‌های p و q هم‌ارزش نیستند ($p \equiv T, q \equiv F$)، بنابراین ارزش گزاره $(p \Leftrightarrow q)$ نادرست است و در نتیجه ترکیب عطفی آن با هر گزاره دیگری دارای ارزش نادرست است. پس ارزش گزاره $(p \Leftrightarrow q) \wedge r$ نادرست است.

$$۲) (\sim p \Leftrightarrow q) \vee r$$

چون $p \equiv q \sim$ پس $(\sim p \Leftrightarrow q) \equiv T$ و لذا ترکیب فصلی یک گزاره درست یا هر گزاره‌ای، دارای ارزش درست است.

$$۳) (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

$p \equiv T$ و $q \equiv F$ بنابراین $(p \Leftrightarrow q) \equiv F$. از طرفی ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ نیز نادرست است؛ یعنی $(p \Rightarrow q) \equiv F$. بنابراین با توجه به اینکه $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \equiv F$ ، ارزش گزاره $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ درست است.

$$۴) (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

$\sim p \equiv q \equiv F$ بنابراین $(\sim p \vee q) \equiv F$. از طرفی $(p \Rightarrow q) \equiv F$ و در نتیجه ارزش گزاره $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ درست است، زیرا هر دو طرف آن هم‌ارزش هستند.

$$۵) (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim(p \vee q)$$

$p \equiv \sim q \equiv T$ بنابراین ترکیب فصلی p و $\sim q$ با هر گزاره دیگری دارای ارزش درست است؛ در نتیجه $(p \vee q) \equiv T$ یا $(\sim p \vee \sim q) \equiv T$ و $(\sim p \vee \sim q) \equiv T$ ، بنابراین دو طرف گزاره $(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim(p \vee q)$ دارای ارزش یکسانی نیستند و ارزش این گزاره نادرست است.

$$۶) (r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$$

$q \equiv F$ بنابراین ترکیب عطفی آن با هر گزاره دیگری دارای ارزش نادرست است؛ یعنی $(p \wedge q) \equiv F$. از طرفی ارزش گزاره $r \Leftrightarrow p$ در صورتی درست است که $r \equiv p$. بنابراین اگر ارزش گزاره r درست باشد ($r \equiv F$)، ارزش گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge q)$ نادرست خواهد بود و اگر ارزش گزاره r نادرست باشد ($r \equiv F$)، با توجه به اینکه $(r \Leftrightarrow p) \equiv F$ ، ارزش گزاره $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$ به انتقای مقدم درست خواهد بود.

$$۷) (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$$

با توجه به قسمت‌های ۵ و ۶، $(p \vee q) \equiv T$ و $(p \wedge q) \equiv F$. بنابراین با توجه به اینکه دو گزاره ارزش یکسانی ندارند، ارزش گزاره $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$ نادرست است.



مثال: با استفاده از جدول ارزش‌ها درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

ب) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

پ) $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

تذکر: گزاره $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ را عکس نقیض گزاره $(p \Rightarrow q)$ می‌نامیم.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(p \vee q)$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	د	د

ت) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

تذکر: این قانون یا هم‌ارزی، یعنی $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ و مشابه آن؛ یعنی $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ به قوانین دمورگان معروف‌اند.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن



تمرین

صفحه ۱۰ و ۱۱ کتاب درسی

۱ جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	بزرگ‌ترین معجزه پیامبر اسلام (ص) قرآن است و اسلام آخرین دین الهی است.	✓	
۲	اگر ۲ عددی فرد است، آنگاه مربع هر عدد فرد عددی زوج است.	✓	
۳	اگر تهران پایتخت ایران است؛ آنگاه استان تهران بزرگ‌ترین استان ایران است.		✓
۴	$4^2 > 2^3 \Rightarrow 8^2 = 2^3$		✓
۵	اگر عدد ۳ اول و عدد ۷ زوج باشد، آنگاه ۱۸ مربع کامل است.	✓	
۶	اگر ۲ عددی زوج یا منفی باشد، آنگاه عدد ۵ اول است.	✓	
۷	اگر فارابی معلم ثانی است، آنگاه افلاطون معلم اول است.		✓
۸	امام خمینی (ره) در سال ۱۳۴۳ تبعید و در سال ۱۳۵۷ به ایران بازگشتند.	✓	
۹	حضرت علی (ع) اولین مردی است که پس از پیامبر، اسلام آوردند و اولین امام شیعیان است.	✓	
۱۰	اگر ۵.۲ > ۵.۳ آنگاه ۵ عددی فرد است و برعکس.	✓	

۲ اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید:

الف) $(p \vee r) \Rightarrow p$

p درست است، بنابراین $(p \vee r)$ گزاره‌ای درست است؛ در نتیجه ارزش گزاره $(p \vee r) \Rightarrow p$ درست است.

ب) $(q \wedge r) \Rightarrow r$

q نادرست است، بنابراین $(q \wedge r)$ گزاره‌ای نادرست و $(q \wedge r) \Rightarrow r$ به انتقای مقدم درست است.

پ) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge r)$

$\sim p \equiv q \equiv F$ بنابراین هر دو گزاره $(p \wedge q)$ و $(\sim p \wedge r)$ نادرست هستند. با توجه به اینکه ارزش دو طرف رابطه دوشروطی یکی است، گزاره درست است.

ت) $(\sim q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

p و q هم‌ارزش نیستند، بنابراین $(p \Leftrightarrow q) \equiv F$. از طرفی $(\sim q \Rightarrow p) \equiv T$ ؛ بنابراین با توجه به اینکه دو طرف رابطه دوشروطی هم‌ارزش نیستند، ارزش گزاره نادرست است.

ث) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

$(p \Rightarrow q)$ و $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ هر دو گزاره‌هایی نادرست هستند. با توجه به اینکه دو طرف رابطه دوشروطی هم‌ارزش هستند، ارزش گزاره درست است.

ج) $(q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$

p گزاره‌ی درستی است، بنابراین $(r \Rightarrow p)$ همواره درست است؛ در نتیجه ارزش گزاره $(q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ همواره درست است.



ج) $(\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q$

$\sim q \equiv T$ ، پس ارزش گزاره $(\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q$ همواره درست خواهد بود.

ح) $(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge r$

$(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge r$ یک گزاره نادرست است، بنابراین $(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge r$ یک گزاره نادرست است.

خ) $(r \Rightarrow p) \wedge p$

p گزاره درستی است؛ بنابراین $(r \Rightarrow p)$ یک گزاره درست است. در نتیجه $(r \Rightarrow p) \wedge p$ نیز گزاره‌ای درست است.

۳) درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید:

الف) $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

ب) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

پ) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	F	F



ت) $(p \Rightarrow p) \equiv T$

p	$p \Rightarrow p$
T	T
F	T

ث) $(p \vee \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv p$

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$p \vee q$	$(p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	F
F	F	T	T	F	F

ج) $(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \sim q$	$(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q)$
T	T	F	T	F	T
T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	F	T

درس دوم: استدلال ریاضی

کار در کلاس صفحه ۱۳ کتاب درسی

عبارات زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

$x + 5 = 2x$

الف) عددی به علاوه پنج، مساوی دو برابر آن عدد است.

$x, y \in \mathbb{R}, xy = x + y$

ب) حاصل ضرب دو عدد حقیقی، برابر مجموعشان است.

$x^2 + 3 > x$

پ) حاصل ضرب عددی در خودش به علاوه ۳، بزرگ‌تر از خودش است.

پرسش متن صفحه ۱۳ کتاب درسی

با استفاده از نم‌افزهای بارکدخوان عبارت متناظر با این بارکدها را بیابید.

