پیشگفتار

دبیران گرامی، دانش‌آموزان عزیز:

این کتاب شامل چهارده بخش است که در هر بخش یکی از کتاب‌های درسی پایهٔ یازدهم مورد بررسی قرار گرفته است. ویژگی‌های این بخش‌ها به شرح زیر است:

هندسه (۲)
آمار و احتمال
حسابان (۱)

پاسخ کاملاً تشریحی به فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌های کتاب درسی
ارائهٔ نکات کاربردی در حل مسائل و تمرین‌های کتاب درسی

فیزیک (۲)
شیمی (۲)

پاسخ کاملاً تشریحی به تمرین‌ها و پرسش‌های کتاب درسی
ارائهٔ نکات مهم به صورت درس به درس

دین و زندگی (۲)
تاریخ معاصر ایران

پوشش کامل مطالب هر درس در قالب پرسش و پاسخ تألیفی
پاسخ به تمرین‌های کتاب درسی

زمین شناسی
انسان و محیطزیست

پوشش کامل مطالب هر درس در قالب پرسش و پاسخ تألیفی
پاسخ به تمرین‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی

فارسی (۲)
نگارش (۲)

معنی واژه‌های سطر به سطر کتاب درسی
معنی کامل ابیات و متن‌های کهن و تحلیل آرایه‌های ادبی
پاسخ کامل به تمرین‌های کتاب درسی

انگلیسی (۲)

ترجمهٔ تمامی متن‌ها و مکالمه‌های کتاب درسی
پاسخ به تمرین‌های کتاب‌های درسی (STUDENT BOOK & WORKBOOK)

عربی زبان قرآن (۲)

ترجمهٔ کامل متن و تمرین‌های هر درس
پاسخ کامل به تمرین‌های کتاب درسی

آزمایشگاه علوم تجربی (۲)

پاسخ کاملاً تشریحی به تمرین‌ها و پرسش‌های کتاب درسی

از همه عزیزانی که این کتاب را انتخاب نموده‌اند تقاضا داریم انتقادها و پیشنهادهای خود را از طریق صندوق پستی ۳۷۷-۱۳۱۴۵ یا تلفن ۶۴۲۰۰-۰۲۱ با ما در میان بگذارند. از تمامی دبیران و کارشناسان محترمی که با راهنمایی‌های خود ما را در تألیف این کتاب یاری کردند، سپاس گزاریم.

گروه مؤلفان

فهرست

ویراستاران

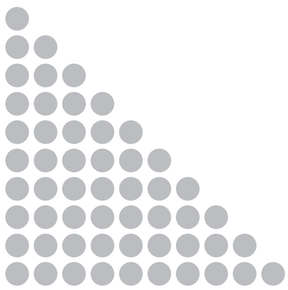
فرحناز عباسی، کبری مهدیخانی، راضیه سالاری، یاسمین نخلی، شیوا طالبی، خدیجه علی‌پور، میثم خرمی، علی اکبر ظهری، مینا مددی

فصل ۱: جبر و معادله

درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

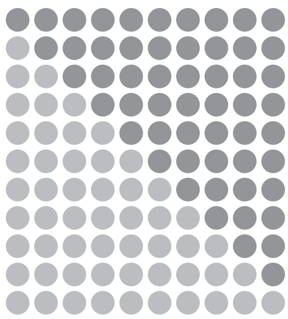
فعالیت صفحهٔ ۲ کتاب‌درسی

تعدادی دگمه داریم که به شکل روبه‌رو آرایش شده‌اند. تعداد این دگمه‌ها چندتاست؟



۱ یکی از راه‌ها، شمارش تعداد دگمه‌ها در هر ردیف است که مجموع آن برابر است با:

$$۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰=۵۵$$



۲ راه دیگر استفاده از شهود و تجسم، با استفاده از شکل پایین است.

در این شکل تعداد ردیف‌ها ۱۱ و تعداد دگمه‌ها در هر ردیف ۱۰ است، پس تعداد کل دگمه‌ها برابر ۱۱۰ است و چون تعداد دگمه‌های آبی و قرمز برابر است، پس:

$$\text{تعداد دگمه‌های قرمز}=\frac{\text{تعداد کل دگمه‌ها}}{۲}=\frac{۱۱۰}{۲}=۵۵$$

۳ برای محاسبهٔ مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n مراحل زیر را انجام داده‌ایم. چگونگی هر مرحله را توضیح دهید.

$$\begin{array}{l}
S=۱+\quad ۲\quad +۳+......+(n-۱)+n\\
\quad\ \updownarrow\qquad \updownarrow\qquad\qquad\qquad \updownarrow\qquad \updownarrow\\
S=n+(n-۱)+...+\ ۳\ +\ ۲\ +\ ۱\\
\hline
۲S=\underbrace{(n+۱)+(n+۱)+...+(n+۱)+(n+۱)}_{\text{n تا}}
\end{array}$$

$$۲S=n(n+۱)$$

$$S=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

اگر بخواهیم مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n را به دست آوریم، در واقع باید مقدار S را بیابیم:

$$S=۱+۲+۳+\cdots+(n-۱)+n \qquad (۱)$$

از طرفی می‌دانیم عمل جمع، خاصیت جابه‌جایی دارد، پس:

$$S=n+(n-۱)+\cdots+۳+۲+۱ \qquad (۲)$$

از جمع کردن طرفین دو رابطهٔ (۱) و (۲)، خواهیم داشت:

$$۲S=(n+۱)+(۲+n-۱)+(۳+n-۲)+\cdots+(n+۱)=\underbrace{(n+۱)+(n+۱)+\cdots+(n+۱)+(n+۱)}_{\text{n تا}}$$

بنابراین n تا $(n+۱)$ باهم جمع می‌شوند، پس:

$$۲S=n(n+۱)\Rightarrow S=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

پرسش متن

صفحهٔ ۳ کتاب درسی

این مسئله را با استفاده از ترکیبیات نیز می‌توان حل کرد. آن را حل کرده و دو روش را با هم مقایسه کنید.

برای تشکیل هر وتر در دایره، نیاز به دو نقطهٔ متمایز روی محیط آن داریم. بنابراین مسئله را می‌توان به‌صورت ترکیبیاتی، این چنین مطرح کرد: «تعداد راه‌هایی که می‌توان از ۲۰ نقطهٔ متمایز، دو نقطه را انتخاب کرد چندتاست؟»

چون ترتیب انتخاب نقاط، اهمیت ندارد، داریم:

$$\binom{۲۰}{۲}=\frac{۲!}{۲!\times(۲۰-۲)!}=\frac{۲۰!}{۲!\times ۱۸!}=\frac{۲۰\times ۱۹\times \cancel{۱۸!}}{۲\times ۱\times \cancel{۱۸!}}=\frac{\overset{۱۰}{\cancel{۲۰}}\times ۱۹}{\underset{۱}{\cancel{۲}}}=۱۹۰$$

همان‌طور که دیده می‌شود، جواب‌های به‌دست‌آمده از هر دو روش، یکسان است.

نکته

همواره داریم:
$$۱+۲+۳+\dots+n=\binom{n}{۲}=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

فعالیت

صفحهٔ ۳ کتاب درسی

دنبالهٔ حسابی زیر را، که در آن a جملهٔ اول، d قدرنسبت و n تعداد جملات آن است، در نظر بگیرید.

$$a\,,\,a+d\,,\,a+۲d,\dots,\,a+(n-۲)d\,,\,a+(n-۱)d$$

مجموع جملات این دنباله را S_n می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$S_n=a+(a+d)+(a+۲d)+\dots+(a+(n-۲)d)+(a+(n-۱)d)$$

۱ حال، جملات S_n را از آخر به اول بنویسید و با جمع جملات متناظر دو عبارت اخیر، $۲S_n$ را به دست آورید. نتیجه خواهید گرفت: $S_n=\frac{n}{۲}[۲a+(n-۱)d]$

$$\begin{array}{rcccccccc} S_n= & a & + & (a+d) & + & \cdots & +(a+(n-۲)d) & + & (a+(n-۱)d)\\ & \updownarrow & & \updownarrow & & & \updownarrow & & \updownarrow\\ +S_n= & (a+(n-۱)d) & + & (a+(n-۲)d) & + & \cdots & +\ (a+d) & + & a \end{array}$$

$$۲S_n=\underbrace{(۲a+(n-۱)d)+(۲a+(n-۱)d)+\dots+(۲a+(n-۱)d)+(۲a+(n-۱)d)}_{\text{n تا}}$$

$$\Rightarrow ۲S_n=n[۲a+(n-۱)d]\Rightarrow S_n=\frac{n}{۲}[۲a+(n-۱)d]$$

کار در کلاس

صفحهٔ ۴ کتاب درسی

۱ نشان دهید در یک دنبالهٔ حسابی اگر $a_۱$ و a_n به‌ترتیب جملات اول و آخر باشند، آنگاه: $S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$

می‌دانیم در یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت d، جملهٔ آخر (جملهٔ nاُم) برابر است با:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d \quad (۱)$$

از طرفی می‌دانیم در این دنباله، مجموع n جملهٔ اول به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]\overset{(۱)}{=}\frac{n}{۲}[a_۱+\underbrace{a_۱+(n-۱)d}_{a_n}]\Rightarrow S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$$

۲ مجموع همهٔ عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را به دست آورید.

می‌دانیم عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۴ عبارت‌اند از: $۱۲,۱۶,۲۰,\dots,۹۶$

که تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_۱=۱۲$ و قدرنسبت $d=۴$ می‌دهند. ابتدا به دنبال این هستیم که بدانیم این دنباله دارای چند جمله است. داریم: $a_n=۹۶ \Rightarrow a_۱+(n-۱)d=۹۶ \Rightarrow ۱۲+(n-۱)(۴)=۹۶ \Rightarrow ۴n+۸=۹۶ \Rightarrow n=۲۲$

حال باید مجموع ۲۲ جملهٔ اول این دنباله را پیدا کنیم:

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\xrightarrow{n=۲۲}S_{۲۲}=\frac{۲۲}{۲}(۱۲+۹۶)=۱۱\times۱۰۸=۱۱۸۸$$

نکته

اگر جملهٔ اول و جملهٔ آخر و همچنین تعداد جملات یک دنبالهٔ حسابی را داشته باشیم، برای پیدا کردن مجموع جملات آن، کافی است تعداد جملات را در میانگین جملهٔ اول و جملهٔ آخر، ضرب کنیم: $S_n=n(\frac{a_۱+a_n}{۲})$

فعالیت صفحهٔ ۴ و ۵ کتاب درسی

۱ قدرنسبت و مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی زیر را به دست آورید. $(a\neq ۰)$

$a,a,a,\dots,a \Rightarrow q=۱\ ,\ S_n=\underbrace{a+a+\dots+a}_{n\text{تا}}=na$

۲ دنبالهٔ هندسی زیر را در نظر بگیرید. $(q\neq ۱)$ $a,aq,aq^۲,\dots$

الف) جملهٔ nام دنباله چیست؟ $a_n=aq^{n-۱}$

نکته

در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع n جملهٔ اول دنباله از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید: $S_n=a\frac{۱-q^n}{۱-q}$

کار در کلاس صفحهٔ ۵ کتاب درسی

مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی زیر را به دست آورید. $\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲},\dots$

دنبالهٔ داده‌شده، یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a=\frac{۱}{۸}$ و قدرنسبت $q=۲$ است.

$$S_n=a\frac{۱-q^n}{۱-q}\Rightarrow S_{۱۰}=\frac{۱}{۸}\times\frac{۱-۲^{۱۰}}{۱-۲}=۲^{-۳}(۲^{۱۰}-۱)=۲^۷-۲^{-۳}=۱۲۸-\frac{۱}{۸}=۱۲۷/۸۷۵$$

کار در کلاس صفحهٔ ۶ کتاب درسی

در داستان مخترع شطرنج اگر در خانهٔ اول یک دانه گندم و در خانهٔ دوم دو دانه گندم و به همین صورت در هر خانه دو برابر خانهٔ قبلی گندم قرار دهیم و اگر هر دانهٔ گندم را یک گرم در نظر بگیریم:

الف) این جایزه چند گرم می‌شود؟ صفحهٔ شطرنج ۶۴ خانه دارد. باید حاصل جمع زیر را به دست آوریم:

$$۱+۲+۴+۸+\dots+۲^{۶۳}=۲^۰+۲^۱+۲^۲+۲^۳+\dots+۲^{۶۳}$$

بنابراین باید مجموع ۶۴ جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a=۱$ و قدرنسبت $q=۲$ را محاسبه کنیم.

$S_n=a\frac{۱-q^n}{۱-q}\Rightarrow S_{۶۴}=۱\times\frac{۱-۲^{۶۴}}{۱-۲}=۲^{۶۴}-۱\Rightarrow$ این جایزه، $۲^{۶۴}-۱$ گرم می‌شود.

ب) نشان دهید جایزهٔ او بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تُن خواهد شد. ۱۰۰۰ میلیارد تُن $=۱۰۰۰\times۱۰^۹$ تُن $=۱۰^{۱۲}\times۱۰^۶g=۱۰^{۱۸}g$

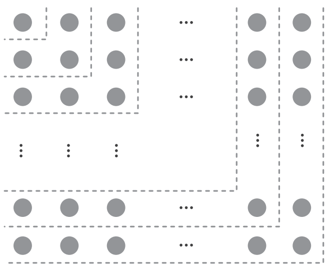
حال نشان می‌دهیم $۲^{۶۴}-۱$ از $۱۰^{۱۸}$ بزرگ‌تر است.

$$۲^{۶۴}-۱\simeq۲^{۶۴}=۲^۴\times(۲^{۱۰})^۶=۱۶\times(۱۰۲۴)^۶\simeq۱۶\times(۱۰۰۰)^۶=۱۶\times۱۰^{۱۸}>۱۰^{۱۸}$$

تمرین

صفحهٔ ۶ کتاب‌درسی

۱) الف) به کمک شکل روبه‌رو حاصل عبارت زیر را به دست آورید. $۱+۳+۵+...+(۲n-۱)=?$



با توجه به شکل، داریم:

$۱^۲=۱\times۱=$ تعداد دایره‌ها $\Rightarrow ۱=$ اولین عدد فرد

$۲^۲=۲\times۲=$ تعداد دایره‌ها $\Rightarrow ۱+۳=$ مجموع دو تا دومین عدد فرد

$۳^۲=۳\times۳=$ تعداد دایره‌ها $\Rightarrow ۱+۳+۵=$ مجموع سه تا سومین عدد فرد

$\vdots$

$n^۲=n\times n=$ تعداد دایره‌ها $\Rightarrow ۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=$ مجموع تا nاُمین عدد فرد

$$\Rightarrow ۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=n^۲$$

ب) اکنون با استفاده از فرمول درستی جواب خود در قسمت الف را بررسی کنید.

در واقع باید مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_۱=۱$ و جملهٔ آخر $a_n=۲n-۱$ را پیدا کنیم.

$$S_n=۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)=\frac{n}{۲}(۱+(۲n-۱))=n^۲$$

همان‌طور که دیده می‌شود، پاسخ قسمت (ب) درستی پاسخ قسمت (الف) را تأیید می‌کند.

۲) مجموع همهٔ اعداد طبیعی سه‌رقمی که مضرب شش هستند، چقدر می‌شود؟

باید حاصل جمع اعداد روبه‌رو را به دست آوریم: $۱۰۲\overset{+۶}{,}۱۰۸\overset{+۶}{,}۱۱۴,\cdots,۹۹۶$

ابتدا بررسی می‌کنیم که در این دنباله، چند جمله وجود دارد: $a_۱=۱۰۲\,,\,d=۶$

$$a_n=۹۹۶\Rightarrow a_۱+(n-۱)d=۹۹۶\Rightarrow ۱۰۲+(n-۱)(۶)=۶n+۹۶=۹۹۶\Rightarrow ۶n=۹۰۰\Rightarrow n=۱۵۰$$

بنابراین باید مجموع ۱۵۰ جملهٔ اول این دنباله را به دست آوریم:

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\Rightarrow S_{۱۵۰}=\frac{۱۵۰}{۲}(۱۰۲+۹۹۶)=۷۵\times۱۰۹۸=۸۲۳۵۰$$

دقت کنید که راه دیگری برای پیدا کردن تعداد جملات دنباله وجود دارد، به صورت زیر:

مضارب طبیعی عدد ۶ $=۶n\Rightarrow ۱۰۰\le ۶n<۱۰۰۰\Rightarrow \frac{۱۰۰}{۶}\le n<\frac{۱۰۰۰}{۶}\xrightarrow{n\in\mathbb{N}}۱۷\le n\le ۱۶۶$

بنابراین n می‌تواند $۱۶۶-۱۷+۱=۱۵۰$ مقدار مختلف اختیار کند، پس تعداد جملات دنباله ۱۵۰تاست.

نکته

اگر a ، b و n اعداد طبیعی و داشته باشیم $a\le n\le b$ در این صورت، n می‌تواند $(b-a+۱)$ مقدار مختلف اختیار کند.

۳) در دنبالهٔ حسابی $...\,,۱۱\,,۸\,,۵$ حداقل چند جملهٔ آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟

$$۵\,,۸\,,۱۱\,,\cdots\Rightarrow a_۱=۵\,,\,d=۳$$

$$S_n>۴۹۳\Rightarrow\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]>۴۹۳\Rightarrow\frac{n}{۲}[۲(۵)+(n-۱)(۳)]>۴۹۳\Rightarrow\frac{n}{۲}(۳n+۷)>۴۹۳\Rightarrow ۳n^۲+۷n-۹۸۶>۰$$

$$۳n^۲+۷n-۹۸۶=۰\Rightarrow n=\frac{-۷\pm\sqrt{۱۱۸۸۱}}{۶}=\frac{-۷\pm۱۰۹}{۶}\Rightarrow\begin{cases}n=\dfrac{-۷+۱۰۹}{۶}=۱۷\\[2mm] n=\dfrac{-۷-۱۰۹}{۶}=\dfrac{-۵۸}{۳}\end{cases}$$

n		$\frac{-۵۸}{۳}$		۱۷	
$۳n^۲+۷n-۹۸۶>۰$	+ (ج)		−		+ (ج)

$$\xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n>۱۷\Rightarrow n\ge ۱۸$$

بنابراین باید حداقل ۱۸ جملهٔ این دنباله را با هم جمع کنیم تا حاصل آن بیشتر از ۴۹۳ شود.

۴ در ۲۰ جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ می‌باشد. جملهٔ اول و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.

فرض می‌کنیم جملهٔ اول دنباله $a_۱$ و قدرنسبت آن d باشد. بنابراین:

$$\text{مجموع جملات شماره‌های فرد} = a_۱ + a_۳ + a_۵ + \cdots + a_{۱۹} = ۱۳۵$$

$$\Rightarrow a_۱ + (a_۱ + ۲d) + (a_۱ + ۴d) + \cdots + (a_۱ + ۱۸d) = ۱۳۵ \Rightarrow ۱۰a_۱ + ۲d(۱+۲+۳+\cdots+۹) = ۱۳۵$$

$$\Rightarrow ۱۰a_۱ + ۲d\left(\frac{۹\times(۹+۱)}{۲}\right) = ۱۳۵ \Rightarrow ۱۰a_۱ + ۹۰d = ۱۳۵ \qquad (۱)$$

$$\text{مجموع جملات شماره‌های زوج} = a_۲ + a_۴ + a_۶ + \cdots + a_{۲۰} = ۱۵۰$$

$$\Rightarrow (a_۱ + d) + (a_۱ + ۳d) + (a_۱ + ۵d) + \cdots + (a_۱ + ۱۹d) = ۱۵۰ \Rightarrow ۱۰a_۱ + d(۱+۳+۵+\cdots+\overset{\text{دهمین عدد فرد}}{\overset{\uparrow}{۱۹}}) = ۱۵۰$$

$$\Rightarrow ۱۰a_۱ + ۱۰^۲ d = ۱۵۰ \Rightarrow ۱۰a_۱ + ۱۰۰d = ۱۵۰ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\,,\,(۲)} \begin{cases} ۱۰a_۱ + ۹۰d = ۱۳۵ \\ ۱۰a_۱ + ۱۰۰d = ۱۵۰ \end{cases} \Rightarrow a_۱ = ۰ \quad , d = ۱/۵$$

۵ جملهٔ عمومی یک دنباله به‌صورت $a_n = ۲^{n-۱}$ است. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آنها برابر ۲۵۵ شود؟

$$a_n = ۲^{n-۱} \Rightarrow \text{جملات دنباله}: ۲^۰, ۲^۱, ۲^۲, \ldots$$

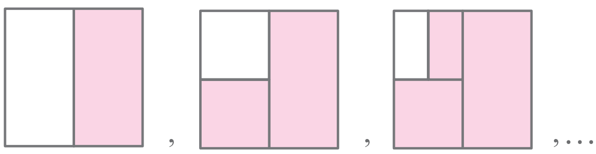
این دنباله یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a = ۲^۰ = ۱$ و قدرنسبت $q = ۲$ است. بنابراین:

$$S_n = ۲۵۵ \Rightarrow a\frac{۱-q^n}{۱-q} = ۲۵۵ \Rightarrow ۱\times\frac{۱-۲^n}{۱-۲} = ۲۵۵ \Rightarrow ۲^n - ۱ = ۲۵۵ \Rightarrow ۲^n = ۲۵۶ \Rightarrow ۲^n = ۲^۸ \Rightarrow n = ۸$$

بنابراین باید ۸ جملهٔ اول این دنباله را با هم جمع کنیم تا حاصل، برابر ۲۵۵ شود.

۶ طول ضلع مربعی یک متراست. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست‌کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

الگوی هندسی مربوطه را رسم می‌کنیم و در هر شکل، سطح رنگ‌شده را به دست می‌آوریم. پس باید داشته باشیم:



$$\frac{۱}{۲} \quad , \quad \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴} \quad , \quad \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸} \quad , \ldots$$

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\cdots+\frac{۱}{۲^n} \geq \frac{۹۹}{۱۰۰} \Rightarrow S_n \geq \frac{۹۹}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\times\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^n}{۱-\frac{۱}{۲}} \geq \frac{۹۹}{۱۰۰} \Rightarrow ۱-(\frac{۱}{۲})^n \geq \frac{۹۹}{۱۰۰} \Rightarrow (\frac{۱}{۲})^n \leq \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow ۲^n \geq ۱۰۰$$

با حدس و آزمایش و اینکه $۲^۷ = ۱۲۸$ ، نتیجه می‌شود $n \geq ۷$. بنابراین پس از حداقل ۷ مرحله، حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است.

۷ برای عدد حقیقی $a\ (a \neq 1)$ و عدد طبیعی n؛

الف) حاصل عبارت زیر را به دست آورید. $1+a+a^2+...+a^{n-1}$

در واقع باید مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $t=1$ و قدرنسبت $q=a$ را محاسبه کنیم.

$$S_n = 1\times\frac{1-a^n}{1-a}=\frac{1-a^n}{1-a}$$

ب) با استفاده از قسمت الف نتیجه بگیرید که: $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+...+a^2+a+1)$

$$S_n=1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}=\frac{1-a^n}{1-a}\Rightarrow a^{n-1}+\cdots+a^2+a+1=\frac{a^n-1}{a-1}\Rightarrow a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+\cdots+a^2+a+1)$$

نکته

اتحادهای زیر را به خاطر بسپارید:

الف) $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a^2+a+1)$ $(n\in\mathbb{N})$

ب) $a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+\cdots+a^2-a+1)$ (n فرد)

درس دوم: معادلات درجه دوم

کار در کلاس

صفحهٔ ۷ کتاب‌درسی

۱ **معادلهٔ $3x^2=5x-2$ را حل کنید.**

$$3x^2-5x+2=0\Rightarrow a=3\,,\,b=-5\,,\,c=2$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(3)(2)=1\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2(3)}=\frac{5\pm1}{6}\Rightarrow x=1 \text{ یا } x=\frac{2}{3}$$

۲ **اگر $x=-1$ یک ریشهٔ معادلهٔ $4x^2-mx-7=0$ باشد، ریشهٔ دیگر کدام است؟**

چون $x=-1$ یک ریشه است، بنابراین با جای‌گذاری آن، تساوی برقرار خواهد بود.

$$4(-1)^2-m(-1)-7=0\Rightarrow 4+m-7=0\Rightarrow m=3\Rightarrow 4x^2-3x-7=0$$

حالا معادله را حل می‌کنیم: $4x^2-3x-7=0\Rightarrow a=4\,,\,b=-3\,,\,c=-7$

$$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4(4)(-7)=121\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{121}}{2(4)}=\frac{3\pm11}{8}\Rightarrow x=-1 \text{ یا } x=\frac{7}{4}$$

بنابراین ریشهٔ دیگر، $x=\frac{7}{4}$ است.

فعالیت

صفحهٔ ۸ کتاب‌درسی

۱ **جدول زیر را مطابق نمونه کامل کنید.**

$\frac{c}{a}$	$\frac{-b}{a}$	c	b	a	ضرب ریشه‌ها (P)	جمع ریشه‌ها (S)	مقدار هر ریشه x_1	x_2 و	$ax^2+bx+c=0$
$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	۲	۵-	۳	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	۱	$3x^2-5x+2=0$
$\frac{-7}{4}$	$\frac{3}{4}$	۷-	۳-	۴	$\frac{-7}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{4}$	۱-	$4x^2-3x-7=0$
۱	۲	۱	۲-	۱	۱	۲	۱	۱	$x^2-2x+1=0$
$-\frac{8}{5}$	$-\frac{6}{5}$	۸-	۶	۵	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$\frac{4}{5}$	۲-	$5x^2+6x-8=0$

۲ الف) در جدول بالا بین جمع ریشه‌ها و ضرایب هر معادله چه ارتباطی مشاهده می‌کنید؟ جمع ریشه‌ها: $S=-\frac{b}{a}$

ب) در جدول بالا بین حاصل‌ضرب ریشه‌ها و ضرایب معادله چه ارتباطی وجود دارد؟ ضرب ریشه‌ها: $P=\frac{c}{a}$

۳ اگر x_1 و x_2 ریشه‌ها و S و P به ترتیب حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند، نشان دهید:

$$S=x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}$$

$$P=x_1x_2=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{(2a)^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

نکته

به طور کلی در هر معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$:

جمع ریشه‌ها: $S=\frac{-b}{a}$ ضرب ریشه‌ها: $P=\frac{c}{a}$

فعالیت

صفحهٔ ۹ کتاب درسی

۱ برای تشکیل معادلهٔ درجه دومی که ریشه‌های آن ۲ و ۳- باشند، راه‌حل زیر ارائه شده است. مراحل حل را توضیح دهید.

$$\begin{cases}x=2\\x=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2=0\\x+3=0\end{cases}\Rightarrow(x-2)(x+3)=0\Rightarrow x^2+x-6=0$$

چون $x=2$ یک ریشهٔ معادله است، بنابراین در تجزیهٔ عبارت درجه دوم موردنظر، حتماً باید عامل صفرشوندهٔ $x-2$ وجود داشته باشد. به‌طور مشابه چون $x=-3$ نیز ریشه است، پس عامل $x-(-3)=x+3$ وجود خواهد داشت. بنابراین عبارت درجه دوم موردنظر در معادله باید به صورت $(x-2)(x+3)$ تجزیه شود. پس معادلهٔ موردنظر به صورت زیر خواهد بود:

$$(x-2)(x+3)=0\Rightarrow x^2+x-6=0$$

۲ اگر $x_1=\alpha$ و $x_2=\beta$ ریشه‌های یک معادلهٔ درجه دوم باشند، با استفاده از روش قسمت قبل معادله را مشخص کنید.

$$\begin{cases}x=\alpha\\x=\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-\alpha=0\\x-\beta=0\end{cases}\Rightarrow(x-\alpha)(x-\beta)=0\Rightarrow x^2-(\alpha+\beta)x+(\alpha\beta)=0$$

دقت داشته باشید که اگر $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$، آنگاه معادله به‌صورت روبه‌رو خواهد بود: $x^2-Sx+P=0$

نکته

به‌طور کلی اگر α و β دو عدد دلخواه، $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha.\beta$ باشند، آنگاه α و β جواب‌های معادلهٔ $x^2-Sx+P=0$ هستند.

کار در کلاس صفحهٔ ۹ کتاب‌درسی

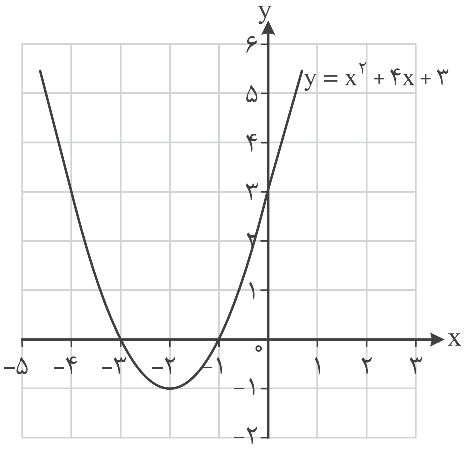
معادلهٔ درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $۲+\sqrt{۳}$ و $۲-\sqrt{۳}$ باشند.

$$\left.\begin{matrix}\alpha=۲+\sqrt{۳}\\ \beta=۲-\sqrt{۳}\end{matrix}\right\}\Rightarrow S=\alpha+\beta=۲+\sqrt{۳}+۲-\sqrt{۳}=۴\ ,\ P=\alpha\beta=(۲+\sqrt{۳})(۲-\sqrt{۳})=۴-۳=۱$$

$$\Rightarrow x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲-۴x+۱=۰$$

فعالیت صفحهٔ ۱۰ کتاب‌درسی

نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^۲+۴x+۳$ در شکل روبه‌رو رسم شده است.



۱ **معادلهٔ $f(x)=۰$ را حل کنید و جواب‌های آن را به‌دست آورید.**

$$f(x)=۰\Rightarrow x^۲+۴x+۳=۰\Rightarrow(x+۱)(x+۳)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+۱=۰\\ x+۳=۰\end{cases}\Rightarrow x=-۱\ \text{ یا }\ x=-۳$$

۲ **محل تلاقی نمودار تابع f با محور طول‌ها چه رابطه‌ای با جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ دارد؟**

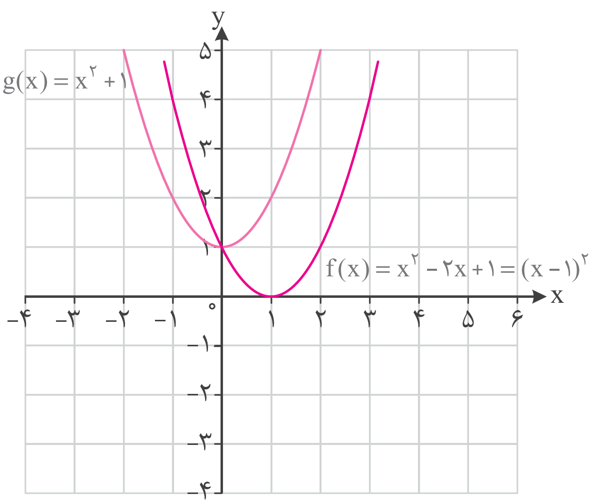
همان‌طور که دیده می‌شود، نمودار تابع f در $x=-۱$ و $x=-۳$ محور طول‌ها (xها) را قطع کرده است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ همان طول محل تلاقی نمودار تابع f با محور طول‌ها هستند.

نکته

برای هر تابع f جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع f می‌نامیم. به عبارت دیگر، صفرهای تابع f آن مقادیری از x (در دامنهٔ f) هستند که به ازای آنها $f(x)$ برابر صفر می‌شود. اگر نمودار $f(x)$ را رسم کنیم صفرهای f طول نقاط تلاقی نمودار با محور xهاست.

کار در کلاس صفحهٔ ۱۰ کتاب‌درسی

۱ **نمودار سهمی‌های $f(x)=x^۲-۲x+۱$ و $g(x)=x^۲+۱$ را رسم کنید.**



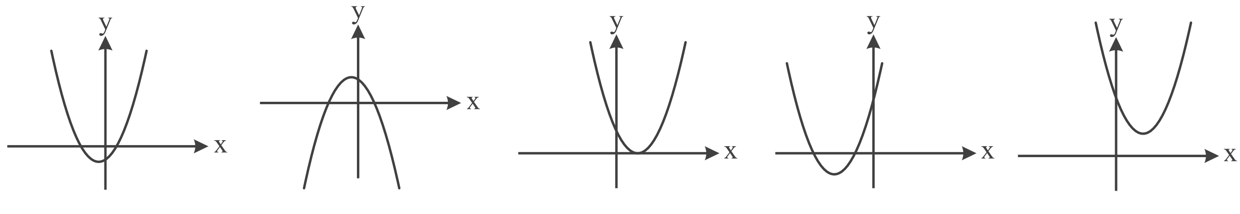
۲ با توجه به نمودارهایی که رسم کردید در مورد جواب‌های معادله‌های $f(x)=0$ و $g(x)=0$ چه می‌توان گفت؟

نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول $x=1$ با محور طول‌ها برخورد کرده است؛ بنابراین معادلهٔ $f(x)=0$ فقط دارای یک جواب و آن هم $x=1$ است. اما نمودار تابع g، محور طول‌ها را هرگز قطع نمی‌کند، لذا معادلهٔ $g(x)=0$ جواب ندارد.

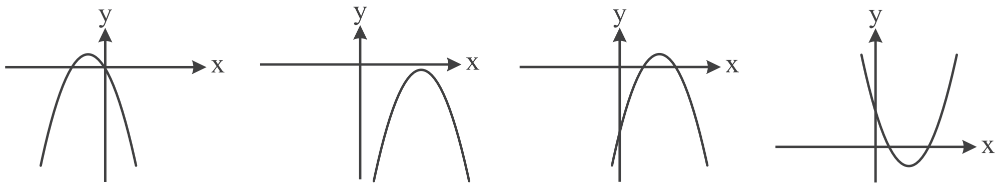
کاردرکلاس

صفحهٔ ۱۲ کتاب‌درسی

هر یک از شکل‌های زیر نمودار یک سهمی به معادلهٔ کلی $f(x)=ax^2+bx+c$ است.



(۱) (۲) (۳) (۴) (۵)



(۶) (۷) (۸) (۹)

۱ با توجه به معادلهٔ $f(x)=0$ نمودار یا نمودارهای متناظر با هر یک از ویژگی‌های زیر را مشخص کنید.

الف) دو ریشهٔ متمایز مثبت دارد. (شکل‌های ۸ و ۹)

ب) دو ریشهٔ منفی دارد. (شکل ۴)

پ) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی دارد. (شکل‌های ۱ و ۲)

ت) ریشه ندارد. (شکل‌های ۵ و ۷)

ث) ریشه ندارد و دارای ماکزیمم است. (شکل ۷)

ج) یک ریشهٔ مضاعف دارد. (شکل ۳)

چ) حاصل جمع ریشه‌های متمایز مثبت است. (شکل‌های ۳، ۸ و ۹)

ح) حاصل جمع ریشه‌ها منفی است. (شکل‌های ۱، ۲، ۴ و ۶)

۲ با توجه به نمودارهای داده شدهٔ مقابل، جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

ویژگی / شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
تعداد صفر f	۲	۲	۱	۲	۰	۲	۰	۲	۲
علامت a	+	−	+	+	+	−	−	−	+
علامت b	+	−	−	+	−	−	+	+	−
علامت c	−	+	+	+	+	۰	−	−	+

تذکر

ستون نظیر شکل پنجم را با توجه به استدلال زیر کامل کرده‌ایم. از آنجا که منحنی سهمی محور xها را قطع نکرده است، پس تعداد صفرهای تابع متناظر آن صفر خواهد بود؛ و چون شاخه‌های منحنی به سمت بالا هستند، علامت a مثبت است. از آنجا که منحنی، محور yها را در نقطه با عرض مثبت قطع می‌کند پس $c>0$ و طول نقطه مینیمم تابع، مقداری مثبت است. پس $\frac{-b}{2a}>0$ و از مثبت بودن a و رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود $b<0$.

کاردرکلاس — صفحهٔ ۱۳ کتاب‌درسی

مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^3+kx^2-x-2$ برابر (۲-) باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به دست آورید. چون $x=-2$ یکی از صفرهای تابع f است، بنابراین باید داشته باشیم:

$$f(-2)=0\Rightarrow(-2)^3+k(-2)^2-(-2)-2=0\Rightarrow -8+4k=0\Rightarrow k=2\Rightarrow f(x)=x^3+2x^2-x-2$$

اما چون $x=-2$ صفر تابع f است، پس در تجزیهٔ f، عامل $x-(-2)=x+2$ وجود خواهد داشت.

بنابراین: $f(x)=(x+2)p(x)\Rightarrow x^3+2x^2-x-2=(x+2)p(x)$

برای یافتن عامل $p(x)$، کافی است خارج‌قسمت تقسیم زیر را پیدا کنیم.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^3}+\cancel{2x^2}-x-2 & x+2 \\ \hline -(\cancel{x^3}+\cancel{2x^2}) & x^2-1\Rightarrow p(x)=x^2-1 \\ \hline \cancel{-x}-\cancel{2} & \\ -(\cancel{-x}-\cancel{2}) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

پس می‌توان نوشت:

$$f(x)=(x+2)(x^2-1)\xrightarrow{f(x)=0}\begin{cases}x+2=0\Rightarrow x=-2\\ x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=-1 \text{ یا } x=1\end{cases}$$

کاردرکلاس — صفحهٔ ۱۳ کتاب‌درسی

همهٔ صفرهای تابع $f(x)=x^4-10x^2+16$ را به دست آورید.

از آنجا که این معادله از درجهٔ چهار است، برای تبدیل آن به یک معادلهٔ درجه دوم، از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم.

فرض می‌کنیم $x^2=t$، بنابراین: $f(x)=0\Rightarrow x^4-10x^2+16=0\Rightarrow t^2-10t+16=0\Rightarrow(t-8)(t-2)=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=8\Rightarrow x^2=8\Rightarrow x=-2\sqrt{2} \text{ یا } x=2\sqrt{2}\\ t=2\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=-\sqrt{2} \text{ یا } x=\sqrt{2}\end{cases}$$

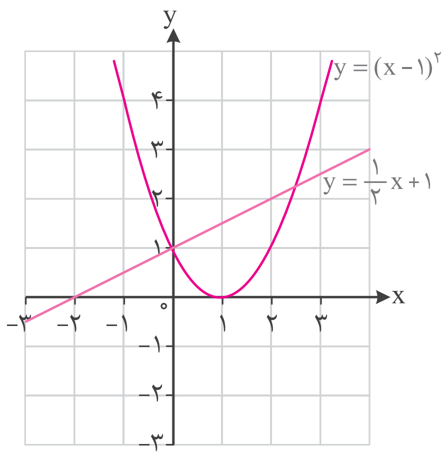
همان‌طور که ملاحظه می‌شود، معادلهٔ $f(x)=0$ دارای چهار جواب است و این یعنی نمودار تابع f، محور طول‌ها را در چهار نقطه قطع می‌کند.

فعالیت — صفحهٔ ۱۴ کتاب‌درسی

۱) **معادلهٔ $(x-1)^2=\frac{1}{2}x+1$ را حل کنید.**

$$(x-1)^2=\frac{1}{2}x+1\Rightarrow 2(x^2-2x+1)=x+2\Rightarrow 2x^2-5x=0\Rightarrow x(2x-5)=0\Rightarrow x=0 \text{ یا } x=\frac{5}{2}$$

۲) **نمودار دو تابع $y=(x-1)^2$ و $y=\frac{1}{2}x+1$ را رسم کنید.**



۳) چه ارتباطی بین ریشه‌های معادلهٔ $(x-1)^2=\frac{1}{2}x+1$ و طول‌های نقاط تلاقی نمودارها وجود دارد؟

ریشه‌های معادلهٔ $(x-1)^2=\frac{1}{2}x+1$ همان طول نقاط برخورد دو نمودار $y=(x-1)^2$ و $y=\frac{1}{2}x+1$ است.

نکته

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط تلاقی نمودارهای این دو تابع جواب‌های معادلهٔ $f(x)=g(x)$ است و برعکس، هر جواب این معادله طول یکی از نقاط تلاقی این دو نمودار است.

این روش حل معادله را، که از طریق آن تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی (و گاهی دقیق) جواب‌ها قابل تشخیص است، روش هندسی (نموداری) حل معادلات می‌نامیم.

تمرین

صفحهٔ ۱۵ و ۱۶ کتاب درسی

۱) معادلهٔ درجه دومی بنویسید که:

الف) ریشه‌های آن $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ باشند.

$$S=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1\ ,\ P=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}\Rightarrow x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2-x+\frac{2}{9}=0$$

ب) یکی از ریشه‌های آن دو برابر دیگری باشد (مسئله چند جواب دارد؟). فرض می‌کنیم α و β ریشه‌ها باشند، در این صورت:

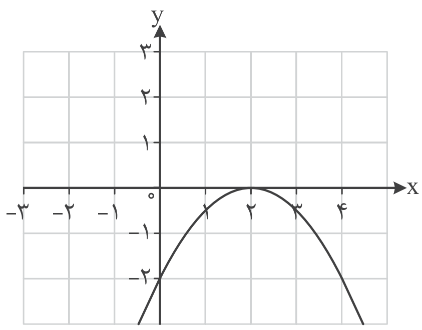
$$\beta=2\alpha\Rightarrow S=\alpha+\beta=3\alpha\ ,\ P=\alpha\beta=2\alpha^2\Rightarrow x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2-3\alpha x+2\alpha^2=0$$

در این معادله، باید $\Delta>0$ باشد، یعنی:

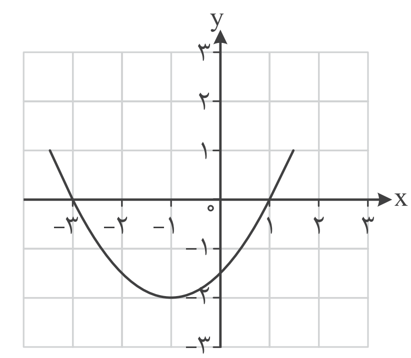
$$(-3\alpha)^2-4(1)(2\alpha^2)>0\Rightarrow 9\alpha^2-8\alpha^2>0\Rightarrow \alpha^2>0$$

بنابراین به ازای هر $\alpha\neq 0$، ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3\alpha x+2\alpha^2=0$ شرایط مسئله را دارند. با توجه به اینکه α می‌تواند بی‌شمار مقدار اختیار کند، این مسئله بی‌شمار جواب خواهد داشت.

۲) در هریک از شکل‌های زیر نمودار سهمی $P(x)=ax^2+bx+c$ داده شده است. در هر حالت صفرهای تابع $P(x)$ و ضابطهٔ آن را مشخص کنید.



(الف)



(ب)

روش اول: با توجه به نمودار، داریم: $x=2$ ریشهٔ تابع $P(x)$ است. $\Rightarrow P(2)=0$

چون $P(x)=ax^2+bx+c$ فقط یک صفر دارد، می‌توان نوشت:

$$P(x)=a(x-2)^2$$

$$P(0)=-2\Rightarrow a(0-2)^2=-2\Rightarrow 4a=-2\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2\Rightarrow P(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-2$$

با توجه به نمودار، داریم: $P(1)=0\ ,\ P(-3)=0$

$x=1$ و $x=-3$ ریشه(صفر)های تابع $P(x)$ هستند. $\Rightarrow$

چون $P(x)=ax^2+bx+c$ دارای دو صفر $x=1$ و $x=-3$ است، می‌توان نوشت:

$$P(x)=a(x-1)(x+3)$$

$$P(-1)=-2\Rightarrow a(-1-1)(-1+3)=-2\Rightarrow 2a=1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x+3)\Rightarrow P(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$$

روش دوم: توجه داشته باشید که در هر دو قسمت (الف) و (ب) می‌توانستیم با پیدا کردن مختصات سه نقطه روی سهمی و جای‌گذاری در ضابطهٔ تابع، به دستگاه سه معادله و سه مجهول برسیم و از حل آن، مقادیر a، b و c و در نتیجه ضابطهٔ $P(x)$ را مشخص کنیم.