



فصل ۱: آشنایی با مبانی ریاضیات

درس اول: آشنایی با منطق ریاضی

کار در کلاس صفحه ۲ و ۳ کتاب درسی

نتیجه استدلال‌های زیر را مشخص کنید.

① هر عدد مرکبی، عدد اول نیست.

۴ عددی مرکب است.

نتیجه: ۴ عدد اول نیست.

② اگر وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم باشد، آنگاه مدارس تعطیل است.

فردا وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم پیش‌بینی شده است.

نتیجه: فردا مدارس تعطیل است.

کار در کلاس صفحه ۳ و ۴ کتاب درسی

از بین جمله‌های زیر، گزاره‌ها را مشخص کنید و ارزش آنها را در صورت امکان تعیین کنید.

● ایران کشور آسیایی است. گزاره است و T.

● در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه تاس مضرب ۳ بیاید، برابر با $\frac{1}{3}$ است. گزاره است و T.

● ای کاش می‌توانستم در یک هوای پاک زندگی کنم.

گزاره نیست، زیرا بیان احساسات است.

● آیا $2+3$ برابر با ۵ است؟ گزاره نیست، زیرا پرسشی است.

● هر عدد فرد بزرگ‌تر از ۵ را می‌توان به صورت مجموع سه عدد اول نوشت.

گزاره است و هنوز معلوم نیست که درست است یا نادرست.

حدس گلدباخ: «هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت.»

حدس قوی‌تر گلدباخ: «هر عدد فرد بزرگ‌تر از ۵ را می‌توان به صورت مجموع سه عدد اول نوشت.»

هر دو حدس گلدباخ هنوز اثبات یا رد نشده‌اند.

● هر معادله درجه دوم دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

گزاره است و F (زیرا معادله درجه ۲ می‌تواند صفر یا یک ریشه نیز داشته باشد).

● صدمین رقم بعد از ممیز عدد π برابر با ۵ است.

گزاره است و F (صدمین رقم بعد از ممیز عدد π برابر ۹ است).



صفحه ۴ کتاب درسی

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

ارزش‌های سه گزاره p ، q و r ، طبق جدول روبه‌رو دارای $2^3 = 8$ حالت دارد. جاهای خالی را پر کنید.

● به نظر شما جدول ارزش‌های چهار گزاره، چند حالت دارد؟ حالت $2^4 = 16 =$ تعداد حالات

● با توجه به اینکه هر گزاره می‌تواند یکی از دو ارزش «د» یا «ن» را داشته باشد و با توجه به اصل ضرب، اگر n گزاره داشته باشیم، در این صورت، جدول ارزش‌های آن گزاره‌ها چند حالت دارد؟

$$\text{حالت } 2^n = \frac{2}{\text{گزاره اول}} \times \frac{2}{\text{گزاره دوم}} \times \dots \times \frac{2}{\text{گزاره ام}}$$

صفحه ۵ کتاب درسی

فعالیت

عبارت‌های خبری زیر را در نظر بگیرید:

(الف) a عددی فرد است.

(ب) در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر با $\frac{1}{4}$ است.

(پ) حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگر برابر با ۶ است. $(3x + 2y = 6)$

۱) ارزش کدام یک از جملات بالا را می‌توانید تعیین کنید؟

هیچ‌کدام، زیرا تا وقتی مقادیر مجهولات تعیین نشوند، معلوم نیست جمله خبری درست است یا خیر.

۲) اگر به جای متغیر در جمله « a عددی فرد است» قرار دهیم $a = 3$ در این صورت، ارزش آن را تعیین کنید.

در این صورت داریم: «۳ عددی فرد است» که گزاره T است.

اگر در آن $a = 4$ قرار دهیم، در این صورت ارزش آن چیست؟

در این صورت داریم: «۴ عددی فرد است» که گزاره F است.

صفحه ۵ کتاب درسی

کار در کلاس

جاهای خالی را پر کنید:

اگر در جمله «ب» قرار دهیم $A = \{1, 2, 3\}$ در این صورت، ارزش گزاره حاصل درست می‌شود. به نظر شما چه مجموعه‌هایی را به جای A قرار دهیم، تا اینکه ارزش گزاره حاصل درست شود.

در پرتاب یک تاس، $S = \{1, 2, \dots, 6\}$ یعنی فضای نمونه‌ای ۶ عضوی است. اگر بخواهیم احتمال وقوع A برابر $\frac{1}{3}$ شود، پس

A باید زیرمجموعه ۳ عضوی از S باشد: $(P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2})$. بنابراین، A می‌تواند هر زیرمجموعه ۳ عضوی

دلخواه از S باشد. همچنین تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعه ۶ عضوی برابر است با: $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$

یعنی می‌توان به جای A ، ۲۰ مجموعه متفاوت قرار داد.

اگر در جمله «ب» قرار دهیم $A = \{2\}$ در این صورت ارزش گزاره حاصل، نادرست است.

اگر در جمله «پ» قرار دهیم $x = 2$ و $y = 0$ در این صورت ارزش گزاره حاصل درست و در حالتی که $x = 1$ و $y = 2$

در این صورت ارزش گزاره حاصل نادرست است.



تفکری

تعداد اعداد x و y که گزاره «پ» را درست نگه می‌دارند، بی‌شمار است. همچنین تعداد اعدادی که گزاره را نادرست نگه می‌دارند نیز بی‌شمار است.

کار در کلاس صفحه ۶ کتاب درسی

دامنه متغیر گزاره‌نماهای زیر داده شده است. مجموعه جواب هر یک از آنها را مشخص کنید.

الف) x مضرب ۷ است. ($D = \mathbb{Z}$)

$$S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 7q, q \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 7, \pm 14, \dots\}$$

یادآوری

در معادله $ax^2 + bx + c = 0$:

الف) هرگاه $a + b + c = 0$ ، آنگاه یکی از ریشه‌ها ۱ و ریشه دیگر $\frac{c}{a}$ است.

$$12x^2 - 5x - 7 = 0 \rightarrow x = 1, \frac{-7}{12}$$

ب) هرگاه $a + c = b$ ، آنگاه یکی از ریشه‌ها برابر ۱- و ریشه دیگر $\frac{-c}{a}$ است.

$$12x^2 + 5x - 7 = 0 \rightarrow x = -1, \frac{7}{12}$$

ب) ($D = \mathbb{R}$) $15x^2 - 7x - 8 = 0$ مجموعه جواب $S = \{1, \frac{-8}{15}\}$

پ) تاس را پرتاب می‌کنیم و $P(\{x\}) = \frac{1}{6}$ ($D = \{1, 2, \dots, 6\}$)

(در اینجا $S = D$ است.) $S = \{1, 2, 3, \dots, 6\}$



آمار و احتمال

فصل ۱

فعالیت صفحه ۶ کتاب درسی

۱) هر یک از این جمله‌های زیر، از چند گزاره تشکیل شده است؟

۲) آیا می‌توانید با توجه به ارزش گزاره‌های به‌کار رفته در هر جمله، ارزش آن جمله را تعیین کنید.

• عدد ۲ زوج است و عدد ۵ مضرب ۳ است. دو گزاره p و q .
 نادرست: گزاره کلی \rightarrow درست: p : درست
 نادرست: q

• عدد ۲ زوج است، یا عدد ۵ مضرب ۳ است. دو گزاره p و q .
 نادرست: q : درست
 نادرست: گزاره کلی \rightarrow درست: p : درست

• اگر عدد ۲ زوج است، آنگاه عدد ۵ مضرب ۳ است. دو گزاره p و q .
 نادرست: q : درست
 نادرست: گزاره کلی \rightarrow درست: p : درست

• چنین نیست که عدد ۲ زوج باشد. یک گزاره p .
 نادرست: p

• اگر عدد ۲ زوج باشد، آنگاه عدد ۵ مضرب ۳ است و برعکس. دو گزاره p و q .
 نادرست: q : درست
 نادرست: گزاره کلی \rightarrow درست: p : درست



فعالیت

صفحه ۸ کتاب درسی

گزاره مرکب زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید.

«سوگند فارغ‌التحصیل شد و پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.»

• آیا ارزش این گزاره مرکب درست است؟ در حالت کلی نمی‌توان در مورد درستی یا نادرستی (ارزش) گزاره مرکب $p \wedge q$ بدون داشتن ارزش p و q قضاوت کرد. یعنی ارزش $p \wedge q$ به ارزش p و q بستگی دارد. ارزش $p \wedge q$ فقط وقتی درست است که هم p و هم q درست باشند.

فرض کنید p : سوگند فارغ‌التحصیل شد. q : پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.

• اگر ارزش p درست و ارزش q نادرست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟
 $p \wedge q$ نادرست است.

• اگر ارزش p نادرست و ارزش q درست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟
 $p \wedge q$ نادرست است.

• هرگاه ارزش دو گزاره p و q نادرست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟
 $p \wedge q$ نادرست است.

• هرگاه ارزش دو گزاره p و q درست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟
 $p \wedge q$ درست است.

بنابراین، ارزش ترکیب عطفی دو گزاره وقتی درست است که ارزش هر دو گزاره p و q درست باشند و در بقیه حالات ارزش $p \wedge q$ نادرست است. جدول ارزش $p \wedge q$ به صورت روبه‌رو است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

آمار و احتمال

فصل ۱

کار در کلاس

صفحه ۸ و ۹ کتاب درسی

① جدول زیر را کامل کنید.

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \vee q$	ارزش $p \wedge q$
هفته هفت روز دارد.	ماه شهریور ۳۱ روز دارد.	د	د	د	د
عدد $\frac{3}{4}$ عددی صحیح است	عدد ۷ مضرب ۵ نیست	ن	د	د	ن
۲ عددی اول است	۳ عددی مرکب است	د	ن	د	ن
$2 < -5$	$\sqrt{-4}$ عددی حقیقی است	ن	ن	ن	ن
(-۷) اول است	اعداد منفی ریشه دوم ندارند	ن	د	د	ن



۲) با کامل کردن جدول ارزش‌ها، نشان دهید که گزاره‌های $(p \vee q)$ و $(\sim p \wedge \sim q)$ هم‌ارز منطقی هستند.

توجه: هر گزاره و نقیض آن دارای «ارزش‌های مخالف» هستند یعنی اگر p گزاره‌ای درست باشد، آنگاه $\sim p$ گزاره‌ای نادرست است و اگر p گزاره‌ای نادرست باشد، آنگاه $\sim p$ گزاره‌ای درست است.

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	د	د

مخالف ارزش q مخالف ارزش p چون نقیض هم هستند پس ارزش مخالف دارند.

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، همهٔ حالت‌های ارزش دو گزارهٔ $(p \vee q)$ و $(\sim p \wedge \sim q)$ یکسان‌اند پس $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ در منطق ریاضی به این هم‌ارزی قانون دمورگان گفته می‌شود.

۳) با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید که $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

مخالف ارزش q مخالف ارزش p چون نقیض هم هستند پس ارزش مخالف دارند.

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، $(p \wedge q)$ و $\sim p \vee \sim q$ به ازای ارزش‌های مختلف p و q دارای ارزش یکسان هستند، پس این دو، هم‌ارز منطقی هستند.

کار در کلاس صفحهٔ ۱۰ و ۱۱ کتاب درسی

۱) با پر کردن جاهای خالی در جدول زیر؛ نشان دهید

که گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$ هم‌ارز منطقی‌اند.

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$ به ازای ارزش‌های مختلف p و q دارای ارزش یکسان هستند، پس این دو هم‌ارز منطقی هستند.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د
ن	د	د	د	د

مخالف ارزش p



۲) گزاره « $q \Rightarrow p$ » عکس ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » و گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ است. با توجه به جدول ارزش گزاره‌های زیر نشان دهید که $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ یعنی، هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

مخالف ارزش q
مخالف ارزش p

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، $p \Rightarrow q$ و $\sim q \Rightarrow \sim p$ به ازای ارزش‌های مختلف p و q دارای ارزش یکسانی هستند، پس هم‌ارز منطقی هستند.

۳) با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها و با پر کردن جاهای خالی نشان دهید:

$$(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T \text{ (ب)}$$

$$(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T \text{ (الف)}$$

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود $p \wedge q \Rightarrow p$ و $p \Rightarrow p \vee q$ گزاره‌هایی هستند که به‌ازای تمامی ارزش‌های p و q، همواره درست هستند (هم‌ارز منطقی با T هستند).

کار در کلاس صفحه ۱۲ و ۱۳ کتاب درسی

۱) با پر کردن جاهای خالی، جدول ارزش گزاره مرکب « $p \Leftrightarrow q$ » را از جدول گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ نتیجه بگیرید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د



با توجه به اینکه $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ، جدول ارزش گزاره $p \Leftrightarrow q$ به صورت زیر است:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

بنابراین، $p \Leftrightarrow q$ فقط زمانی درست است که p و q دارای ارزش یکسان باشند، یعنی یا هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.

۲) با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها، هم‌ارزی‌های منطقی زیر را مانند نمونه اثبات کنید.

الف) قوانین جابه‌جایی

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$	$p \wedge q$	$q \wedge p$
د	د	د	د	د	د
د	ن	د	د	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن

بنابراین، $p \wedge q$ و $q \wedge p$ و نیز $p \vee q$ و $q \vee p$ به ازای ارزش‌های مختلف p و q دارای ارزش یکسانی هستند، پس هم‌ارز منطقی‌اند.

ب) قوانین شرکت‌پذیری

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	د
د	ن	د	د	د	د	د
ن	د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

بنابراین، $(p \vee q) \vee r$ و $p \vee (q \vee r)$ به ازای ارزش‌های مختلف p ، q و r دارای ارزش‌های یکسانی هستند، پس هم‌ارز منطقی‌اند.



$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

بنابراین، $(p \wedge q) \wedge r$ و $p \wedge (q \wedge r)$ به ازای ارزش‌های مختلف p ، q و r دارای ارزش‌های یکسانی هستند، پس هم‌ارز منطقی‌اند.

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

پ) قوانین توزیع پذیری

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	د	د	د
د	ن	د	ن	د	د	د	د
ن	د	د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

بنابراین، $p \vee (q \wedge r)$ و $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ به ازای ارزش‌های مختلف p ، q و r دارای ارزش‌های یکسانی هستند، پس هم‌ارز منطقی‌اند.

کار در کلاس صفحه ۱۴ کتاب درسی

تذکره

نماد \forall (سور عمومی) به معنای «به ازای هر» یا «به ازای جمیع مقادیر» است. توجه کنیم که گاهی در نوشتن عبارت‌های ریاضی به زبان طبیعی، بهتر است این سور را به‌طور ساده «هر» ترجمه کنیم.

مثال: (هر عدد حقیقی، یا گویاست یا گنگ.) \rightarrow $(\forall x \in \mathbb{R}; x \in \mathbb{Q} \vee x \in \mathbb{Q}')$ زبان طبیعی



جدول زیر را کامل کنید.

عبارت با زبان ریاضی	عبارت با زبان طبیعی
$\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0$	برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^2 \geq 0$
$\forall a \in \mathbb{E}; a = 2k (k \in \mathbb{Z})$	هر عدد صحیح زوج a به شکل $a = 2k$ است که در آن k عددی صحیح است.
$\exists p \in \mathbb{P}; p = 2k (k \in \mathbb{Z})$	عدد اولی مثل p وجود دارد که به شکل $p = 2k$ است و در آن k عددی صحیح است.
$\exists a \in \mathbb{O}; a \in \mathbb{P}$	بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.

 در جدول فوق، مجموعه اعداد زوج را با E ، مجموعه اعداد فرد را با O و مجموعه اعداد اول را با P نمایش داده‌ایم.

کار در کلاس صفحه ۱۵ کتاب درسی

تفکر

گزاره‌هایی که «سور عمومی» دارند، وقتی درست هستند که «مثال نقض» در مجموعه داده شده، نداشته باشند و گزاره‌هایی که «سور وجودی» دارند، وقتی درست هستند که برای حداقل یک عضو از مجموعه داده شده، درست باشند.

درستی یا نادرستی گزاره‌های سوری زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد اول، فرد است. نادرست، عبارت «هر» یعنی سور عمومی دارد ولی برای آن مثال نقض $p=2$ وجود دارد که اول است ولی فرد نیست.

ب) $\exists x \in \mathbb{N}; 2x^2 + 3x + 1 = 0$ ؛ نادرست، با حل معادله درجه دوم داده شده، جواب‌ها برابر -1 و $-\frac{1}{2}$ هستند که هیچ‌کدام عدد طبیعی نیستند. یعنی حتی برای یک x از \mathbb{N} هم گزاره‌نمای داده شده برقرار نیست. (دقت کنید سور، وجودی است).

پ) $\exists x \in \mathbb{Z}; 2x^2 + 3x + 1 = 0$ ؛ درست، با حل معادله درجه دوم داده شده، جواب‌ها برابر -1 و $-\frac{1}{2}$ هستند که $-\frac{1}{2}$ عدد صحیح نیست ولی -1 عدد صحیح است، پس برای حداقل یک مقدار از \mathbb{Z} ، گزاره‌نمای داده شده برقرار است (دقت کنید سور، وجودی است).

ت) هر عدد زوج، غیر اول است. نادرست، عبارت «هر» یعنی سور عمومی دارد ولی برای آن مثال نقض $p=2$ وجود دارد که زوج و اول است.

ث) در آمار، هر متغیر ترتیبی یک متغیر کیفی است. درست، هر متغیر کیفی، یا ترتیبی است یا اسمی؛ بنابراین هر متغیر ترتیبی (یا اسمی) اول باید کیفی بوده باشد.

ج) در احتمال، هر مجموعه پیشامد زیرمجموعه فضای نمونه است. درست، طبق تعریف پیشامد، هر پیشامد زیرمجموعه فضای نمونه است.

چ) در فضای نمونه S ، پیشامدی مانند A وجود دارد به طوری که $P(A) > 1$. نادرست، زیرا این گزاره، سور وجودی دارد، پس فقط کافی است برای یک پیشامد $A \subseteq S$ درست باشد. اما طبق اصول احتمال، برای هر $A \subseteq S$ داریم $P(A) \leq 1$ ؛ بنابراین حتی برای یک پیشامد A از S نیز درست نیست.

ح) طول هر پاره خط، عدد حقیقی است. درست، زیرا طبق تعریف، طول، عددی حقیقی است.



پرسش متن

صفحه ۱۵ و ۱۶ کتاب درسی

گزاره «علی به مدرسه رفت» را در نظر بگیرید و نقیض آن را در زیر بنویسید.

علی به مدرسه نرفت.

معمولاً برای نقیض کردن یک گزاره، فعل آن را منفی می‌کنند. اکنون گزاره زیر را در نظر بگیرید و نقیض آن را بنویسید.

هر آسیایی، ایرانی است.

«این چنین نیست که هر آسیایی ایرانی باشد» یا «حداقل یک آسیایی وجود دارد که ایرانی نیست».

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، ارزش دو گزاره قبل («هر آسیایی، ایرانی است» و «هر آسیایی، ایرانی نیست») نادرست است

و این غیرممکن است (چرا؟) ابتدا یادآوری می‌کنیم که از بین یک گزاره و نقیض آن (p و $\sim p$) دقیقاً یکی باید درست

باشد. حال به بررسی دو گزاره می‌پردازیم:

هر آسیایی، ایرانی است: این گزاره، سور عمومی دارد، پس «ایرانی بودن» در مجموعه «انسان‌های آسیایی» نباید مثال

نقض داشته باشد ولی مثلاً هر فرد ژاپنی، مثال نقض این گزاره است.

هر آسیایی، ایرانی نیست: این گزاره نیز سور عمومی دارد، پس «ایرانی نبودن» در مجموعه «انسان‌های آسیایی» نباید

مثال نقض داشته باشد ولی هر فرد ایرانی، مثال نقض این گزاره است.

نتیجه: دو گزاره «هر آسیایی، ایرانی است» و «هر آسیایی، ایرانی نیست» نمی‌توانند نقیض هم باشند، زیرا طبق یادآوری ذکر

شده، دقیقاً یکی از این دو گزاره باید درست باشد که این‌طور نیست و هر دو گزاره نادرست هستند و این غیرممکن است.

تمرین

صفحه ۱۷ و ۱۸ کتاب درسی

۱ از جملات زیر کدام یک گزاره است، ارزش گزاره‌ها را مشخص کنید.

(الف) خیام پزشک ایرانی است. گزاره است و F ، زیرا خیام، ریاضی‌دان ایرانی است.

(ب) افلاطون فیلسوف یونانی است. گزاره است و T .

(پ) $۳ + ۵ > ۶$: گزاره است و T .

(ت) تخته‌سیاه را پاک کنید. گزاره نیست زیرا جمله امری است.

(ث) $\{1, 2, 3, 4\} \in \{1\}$: گزاره است و F ، زیرا $\{1\}$ زیرمجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ است نه عضو آن.

(ج) چه باران شدیدی می‌آید. گزاره نیست زیرا به نوعی بیان احساس است و محتوای خبری از آن استنباط نمی‌شود.

(چ) عدد ۱۹۱۷ عددی اول است. گزاره است و F ، زیرا بر ۳ بخش‌پذیر است.

(ح) $\emptyset \in \mathbb{R}$: گزاره است و F ، زیرا \emptyset زیرمجموعه همه مجموعه‌هاست.

(خ) $\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$: گزاره است و F ، زیرا $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.

(د) عدد $۵^۹ + ۸$ عددی اول است. گزاره است و F . زیرا:

$$\text{عدد } ۵^۹ + ۸ \text{ اول نیست} \Rightarrow ۱۲۷ \times ۱۵۳۷۹ = (۲^۲ - ۲۵۰ + ۱۲۵)(۲ + ۱۲۵) \stackrel{\text{اتحاد چاتی و لاغر}}{=} ۲^۳ + ۱۲۵^۳ = (۵^۳)^۳ + ۲^۳$$

(ذ) به امید کامیابی شما. گزاره نیست زیرا بیان احساسات است.

(ر) آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. گزاره است و T (طبق تعریف کتاب ریاضی ۱).



۲) در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید، به طوری که گزاره‌های حاصل دارای ارزش درست باشند.

ب) $5 + \left[\frac{1}{2} \right] \notin \mathbb{Z}$

الف) $-7 \times \boxed{1} = -7$

ت) $\frac{10 \times 9}{3} > 5 \times 3$

پ) $\frac{8 \times \left[\frac{1}{6} \text{ یا } \frac{1}{4} \right]}{4} \in \left\{ 2, \frac{1}{3} \right\}$

ج) $1 \in \{ \}$

ث) $\boxed{0} \times \sqrt{2} = 0$

ح) $7(\boxed{8} - 3) = 35$

چ) $5(\boxed{7} - 3) = 20$

۳) دامنه متغیر هر یک از گزاره‌های زیر، مجموعه اعداد صحیح است، مجموعه جواب هر یک را بنویسید.

الف) $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = k^2, k \in \mathbb{Z}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$

الف) x مربع کامل است.

ب) $S = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 5k + 1, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$

ب) a یک واحد از مضرب ۵ بیشتر است.

پ) $-1 \leq \frac{2x+1}{3}$

$\frac{2x+1}{3} \leq -1 \xrightarrow{\times 3} 2x+1 \leq -3 \xrightarrow{-1} 2x \leq -4 \xrightarrow{\div 2} x \leq -2 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq -2\} = \{\dots, -4, -3, -2\}$

$n(n+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \in W \\ n = -1 \notin W \end{cases} \Rightarrow S = \{0\}$

ت) $\{n(n+1) = 0 \mid n \in W\}$

۴) نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) $p: 4 \leq 3 \Rightarrow \sim p: 4 \not\leq 3 \equiv 4 > 3$

الف) $4 \leq 3$

ب) ابوالو بوزجانی، ریاضی‌دان ایرانی است.

نقیض: ابوالوفای بوزجانی ریاضی‌دان نیست یا ایرانی نیست.

پ) $a \in \{b, c, d\} \rightarrow \sim p: a \notin \{b, c, d\}$

پ) $a \in \{b, c, d\}$

پ) $\sim p$ را به شکل $a \in \{b, c, d\}$ نیز می‌توان نوشت.

ت) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویا است.

نقیض: ۲ عددی زوج نیست و π عددی گویا نیست.

نقیض را به صورت « ۲ عددی زوج نیست و π عددی گنگ است » نیز می‌توان نوشت. توجه کنید عدد حقیقی که زوج

نباشد، لزوماً فرد نیست ولی عدد حقیقی که گویا نباشد، لزوماً گنگ است.

ث) خورشید به دور زمین می‌چرخد و سنج مرکز استان کردستان است.

نقیض: خورشید به دور زمین نمی‌چرخد یا سنج مرکز استان کردستان نیست.

تذکره

اینکه خورشید به دور زمین نمی‌چرخد، به معنای آن نیست که زمین دور خورشید می‌چرخد. از لحاظ منطقی،

زمین و خورشید می‌توانند اصلاً دور یکدیگر نچرخند.



ج) اگر ۳ زوج باشد، آنگاه ۲ فرد است.

یادآوری

از قبل می‌دانیم که $p \Rightarrow q \equiv p \vee q \equiv \sim p \Rightarrow q$ ، بنابراین برای به‌دست آوردن نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ از هم‌ارز منطقی آن استفاده می‌کنیم. همچنین به یاد داریم که:

$$۱) \sim(\sim p) \equiv p \quad ۲) \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge \sim q \equiv p \wedge (\sim q) \equiv \sim q \wedge p$$

$$\left. \begin{array}{l} ۲) \text{ فرد نیست: } \sim q \\ ۳) \text{ زوج است: } p \end{array} \right\} \rightarrow \sim q \wedge p$$

$$\underbrace{۳ \text{ زوج باشد}}_p \Rightarrow \underbrace{۲ \text{ فرد است}}_q$$

۵) ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) $(۲ < ۳) \wedge (۴ + ۳ = ۱۰)$: این گزاره مرکب از دو گزاره $p: ۲ < ۳$ و $q: ۴ + ۳ = ۱۰$ با ترکیب عطفی (\wedge)، تشکیل شده است، پس گزاره مرکب وقتی درست است که p و q هر دو درست باشند. اما واضح است که q نادرست است؛ بنابراین گزاره مرکب نیز، نادرست خواهد بود.

ب) $(۰ = ۱ + (-۱)^۲) \vee (۵ > ۳)$: این گزاره مرکب از دو گزاره $p: ۵ > ۳$ و $q: ۰ = ۱ + (-۱)^۲$ با ترکیب فصلی (\vee) تشکیل شده است، پس وقتی درست است که حداقل یکی از گزاره‌های p و q درست باشند. چون p درست است؛ بنابراین گزاره مرکب، درست خواهد بود.

پ) $(\frac{1}{4} \neq \frac{3}{6}) \vee (۱ \in \{۲, ۳, ۴\})$: این گزاره مرکب از دو گزاره $p: \frac{1}{4} \neq \frac{3}{6}$ و $q: ۱ \in \{۲, ۳, ۴\}$ با ترکیب فصلی (\vee) تشکیل شده است. چون هر دو گزاره نادرست هستند؛ بنابراین گزاره مرکب نیز، نادرست خواهد بود.

ت) اگر عدد ۴ فرد باشد، آنگاه ۴ مربع کامل نیست. این گزاره، شرطی ($p \Rightarrow q$) است که در آن، ۴ عدد فرد است: p و ۴ مربع کامل نیست: q است که هر دو نادرست هستند؛ بنابراین، گزاره مرکب، درست خواهد بود.

ث) در لوزی مفروض دو قطر با هم برابرند. لوزی مفروض را D می‌نامیم، بنابراین، این عبارت به شکل «در لوزی D ، دو قطر با هم برابرند» قابل بیان است. این عبارت گزاره نیست بلکه گزاره‌نما است. زیرا اگر D مربع باشد، دو قطر با هم برابر بوده و گزاره‌نما، به گزاره‌ای درست تبدیل می‌شود. در غیر این صورت، دو قطر لوزی برابر نخواهند بود و گزاره‌نما، به گزاره‌ای نادرست تبدیل خواهد شد.

ج) ۲ عدد اول نیست، اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل است. این گزاره، دو شرطی ($p \Leftrightarrow q$) است که در آن، ۲ عدد اول نیست: p و ۲ مربع کامل است: q است که هر دو نادرست هستند. با توجه به اینکه گزاره $p \Leftrightarrow q$ فقط وقتی درست است که p و q ارزش یکسان داشته باشند؛ بنابراین، گزاره مرکب درست خواهد بود.

چ) $-۲ < -۳ \Leftrightarrow ۲ > ۳$: این گزاره نیز، دو شرطی ($p \Leftrightarrow q$) است که در آن $p: ۲ > ۳$ و $q: -۲ < -۳$ است که هر دو نادرست هستند؛ بنابراین، گزاره مرکب درست خواهد بود.



ح) اگر $\{b\} \in a$ آنگاه $a = b$ و برعکس. عبارت داده شده، ترکیب دو شرطی دو گزاره‌نمای $p: a \in \{b\}$ و $q: a = b$ است. بنابراین، برای مقادیر مختلف a و b ، دو گزاره‌نمای p و q ، ممکن است به گزاره‌های درست یا نادرست تبدیل شوند. اما با کمی دقت، متوجه می‌شویم که p و q ، برای مقادیر مختلف a و b ، یا هر دو درست هستند یا هر دو نادرست. زیرا a یا b با هم برابرند یا برابر نیستند. بنابراین، دو حالت ممکن است رخ دهد:

حالت ۱: فرض کنید $a = b$ (a و b دو عدد حقیقی دلخواه هستند) بنابراین برای مقادیر مختلف a و b ، گزاره‌نمای q به یک گزاره درست تبدیل می‌شود. از طرفی چون $a = b$ است پس $a \in \{b\}$ یعنی $a \in \{a\}$ که درست است. پس p نیز به یک گزاره درست تبدیل می‌شود.

حالت ۲: فرض کنید $a \neq b$ (a و b دو عدد حقیقی دلخواه هستند) بنابراین برای مقادیر مختلف a و b ، گزاره‌نمای q به یک گزاره نادرست تبدیل می‌شود. از طرفی چون $a \neq b$ است، پس $a \in \{b\}$ نیز نادرست خواهد بود، یعنی p نیز به یک گزاره نادرست تبدیل می‌شود.

نتیجه: گزاره‌نمای مرکب $p \Leftrightarrow q$ که در قسمت (ح) داده شده است، برای مقادیر مختلف a و b به گزاره‌های دو شرطی تبدیل می‌شود که در آنها، هر دو طرف علامت (\Leftrightarrow) گزاره‌های درست یا هر دو طرف آن، گزاره‌های نادرست هستند. بنابراین، این گزاره‌نمای مرکب برای تمامی مقادیر متفاوت a و b ، همواره درست است. ($S = D = \mathbb{R}$)

تکنیکی

هر سه عبارت داده شده در قسمت‌های «ج» و «ج» و «ح»، شکل‌های مختلف بیان گزاره‌های دو شرطی هستند.

۶ جدول زیر را کامل کنید.

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $(p \Rightarrow q)$	ارزش $(p \wedge q)$
عدد ۲ زوج است.	عدد ۳ اول است.	د	د	د	د
عدد ۱ نه اول است و نه مرکب	$1 < 2$	د	ن	ن	ن
$2 \in \{1, 2\}$	$\emptyset \in \{1, 2\}$	د	ن	ن	ن
عدد ۶ مرکب است.	عدد ۷ اول است.	د	د	د	د

در سطر اول جدول، $p \wedge q$ درست است؛ بنابراین p و q هر دو باید گزاره‌هایی درست باشند.

در سطر دوم جدول، $p \Rightarrow q$ نادرست است؛ بنابراین p باید درست و q باید نادرست باشد.

در سطر سوم جدول، $p \wedge q$ نادرست است؛ بنابراین p یا q یا هر دو باید نادرست باشند. چون p درست است پس لازم است که q نادرست باشد.

در سطر چهارم جدول، $p \Rightarrow q$ درست است. با توجه به اینکه q درست است، پس p می‌تواند درست یا نادرست باشد. اما توجه کنیم که اگر p ، یک گزاره درست باشد آنگاه $p \wedge q$ نیز گزاره‌ای درست خواهد بود. در غیر این صورت، $p \wedge q$ گزاره‌ای نادرست خواهد بود.



۷ جدول ارزش‌های هر یک از گزاره‌های زیر را رسم کنید.

الف) $p \wedge \sim q$

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن

ب) $\sim p \wedge p$

p	$\sim p$	$\sim p \wedge p$
د	ن	ن
ن	د	ن

بنابراین، $\sim p \wedge p$ گزاره‌ای همواره نادرست یعنی «F» است.

پ) $\sim p \vee p$

p	$\sim p$	$\sim p \vee p$
د	ن	د
ن	د	د

بنابراین $\sim p \vee p$ گزاره‌ای همواره درست یعنی «T» است.

ت) $(p \vee q) \wedge \sim p$

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \sim p$
د	د	ن	د	ن
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	ن

ث) $(p \vee q) \Leftrightarrow q$

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \Leftrightarrow q$
د	د	د	د
د	ن	د	ن
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د



ج $\sim p \Leftrightarrow \sim q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Leftrightarrow \sim q$
د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

۸ با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید که:

الف $p \Rightarrow p \equiv T$

p	$p \Rightarrow p$	T
د	د	د
ن	د	د

بنابراین، به ازای ارزش‌های مختلف گزاره p، گزاره $p \Rightarrow p$ همواره درست است، پس هم‌ارز منطقی با «T» است.

ب $p \vee F \equiv p$

p	F	$p \vee F$
د	ن	د
ن	ن	ن

بنابراین، به ازای ارزش‌های مختلف گزاره p، گزاره $p \vee F$ دارای ارزش یکسان با گزاره p است، پس این دو گزاره، هم‌ارز منطقی هستند.

پ $p \wedge T \equiv p$

p	T	$p \wedge T$
د	د	د
ن	د	ن

بنابراین، به ازای ارزش‌های مختلف گزاره p، گزاره $p \wedge T$ دارای ارزش یکسان با گزاره p است، پس این دو گزاره، هم‌ارز منطقی هستند.

ت $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$
د	د	ن	د	ن	ن
د	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن

بنابراین، به ازای ارزش‌های مختلف گزاره‌های p و q، گزاره $\sim(p \Rightarrow q)$ دارای ارزش یکسان با گزاره $p \wedge \sim q$ است، پس این دو گزاره، هم‌ارز منطقی هستند.



$$p \wedge (q \vee p) \equiv p \quad \text{ث}$$

p	q	$q \vee p$	$p \wedge (q \vee p)$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

بنابراین، به ازای تمام ارزش‌های مختلف گزاره‌های p و q ، دو گزاره p و $p \wedge (q \vee p)$ دارای ارزش‌های یکسانی هستند، پس هم‌ارز منطقی هستند.

$$p \vee (q \wedge p) \equiv p \quad \text{ج}$$

p	q	$q \wedge p$	$p \vee (q \wedge p)$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

بنابراین، به ازای تمام ارزش‌های مختلف گزاره‌های p و q ، دو گزاره p و $p \vee (q \wedge p)$ دارای ارزش‌های یکسانی هستند، پس هم‌ارز منطقی هستند.

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r \quad \text{چ}$$

p	q	r	$p \wedge q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	د
ن	د	ن	ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	د	د	د

بنابراین، به ازای تمام ارزش‌های مختلف p ، q و r ، دو گزاره $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ و $(p \wedge q) \Rightarrow r$ دارای ارزش‌های یکسانی هستند، پس هم‌ارز منطقی هستند.



(ح) $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$

p	q	$\sim p$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim(p \Leftrightarrow q)$	$\sim p \Leftrightarrow q$
د	د	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	ن	د	د
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	ن

بنابراین، به ازای تمام ارزش‌های مختلف گزاره‌های p و q، دو گزاره $\sim(p \Leftrightarrow q)$ و $\sim p \Leftrightarrow q$ دارای ارزش‌های یکسانی هستند، پس هم‌ارز منطقی هستند.

۹) ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و n^۲ مضرب ۳ باشد، آنگاه n نیز مضرب ۳ است.

نکته

فرض کنید a و b دو عدد صحیح دلخواه و $b \neq 0$ باشند. در این صورت، در تقسیم a بر b، دو عدد صحیح q و r به صورت یکتا یافت می‌شوند:

$$\begin{cases} a = bq + r \\ r = 0, 1, \dots, |b| - 1 \end{cases}$$

باقی‌مانده خارج قسمت

مثال: اگر عدد صحیح a را بر $b = 3$ تقسیم کنیم، داریم: $b = 3 \rightarrow |b| - 1 = 3 - 1 = 2 \rightarrow r = 0, 1, 2$

بنابراین، ۳ حالت پیش می‌آید: $a = 3q + 0$ یا $a = 3q + 1$ یا $a = 3q + 2$

تذکر: وقتی $r = 0$ ($a = bq$) باشد، می‌گوییم a بر b بخش‌پذیر است یا a مضرب b است. در مثال، در حالتی که $a = 3q$ است، a مضرب ۳ است.

به جای گزاره شرطی داده شده، عکس نقیض آن را که از لحاظ منطقی با آن هم‌ارز است را اثبات می‌کنیم. توجه کنیم که عدد صحیح بودن n، جزئی از فرض یا حکم نیست بلکه جزء پیش‌فرض محسوب می‌شود.

$$\underbrace{\underbrace{n^2 \text{ مضرب } 3 \text{ باشد}}_p \rightarrow \underbrace{n \text{ مضرب } 3 \text{ است}}_q}_{\text{گزاره اصلی}} \equiv \underbrace{\underbrace{n \text{ مضرب } 3 \text{ نیست}}_{\sim q} \rightarrow \underbrace{n^2 \text{ مضرب } 3 \text{ نیست}}_{\sim p}}_{\text{عکس و نقیض گزاره اصلی}}$$

فرض کنیم که n مضرب ۳ نباشد، یعنی $n = 3q$ نیست؛ بنابراین فقط دو حالت باقی می‌ماند:

$$\begin{cases} n = 3q + 1 \xrightarrow{\text{به توان } 2} n^2 = (3q + 1)^2 = 9q^2 + 6q + 1 = 3(\underbrace{3q^2 + 2q}_{q' \in \mathbb{Z}}) + 1 = 3q' + 1 \\ \text{یا} \\ n = 3q + 2 \xrightarrow{\text{به توان } 2} n^2 = (3q + 2)^2 = 9q^2 + 12q + 4 = 3(\underbrace{3q^2 + 4q + 1}_{q'' \in \mathbb{Z}}) + 1 = 3q'' + 1 \end{cases}$$

بنابراین، وقتی $n \neq 3q$ آنگاه $n^2 = 3q' + 1$ یا $n^2 = 3q'' + 1$ ، یعنی n^2 در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده برابر ۱ خواهد داشت و بنابراین n^2 مضرب ۳ نخواهد بود و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.



۱۵ گزاره‌های زیر را با استفاده از نمادهای \exists, \forall بنویسید و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است. $\forall n \in \mathbb{N}; n = 2q \vee n = 2q - 1, q \in \mathbb{N}$

این گزاره سور عمومی دارد و گزاره با سور عمومی فقط وقتی نادرست است که بتوان برای آن مثال نقض در مجموعه داده شده (\mathbb{N}) پیدا کرد. از آن جایی که، «هیچ عدد طبیعی وجود ندارد که فرد یا زوج نباشد» پس این گزاره مثال نقض ندارد و درست است.

ب) برای بعضی از مقادیر a در مجموعه اعداد حسابی داریم: $a^2 < 0$. $\exists a \in \mathbb{W}; a^2 < 0$

این گزاره سور وجودی دارد، پس وقتی درست است که حداقل برای یک عضو از مجموعه داده شده (\mathbb{W})، درست باشد. اما با کمی دقت متوجه می شویم که $a^2 < 0$ برای هیچ عدد حقیقی و بنابراین برای هیچ عدد حسابی درست نیست. پس گزاره، نادرست است.

پ) همه اعداد اول فردند. $\forall x \in \mathbb{P}; x \in \mathbb{O}$

این گزاره سور عمومی دارد. پس در مجموعه داده شده (\mathbb{P})، نباید مثال نقض داشته باشد. اما عدد $x = 2$ اول هست ولی فرد نیست، پس مثال نقض این گزاره محسوب می شود. بنابراین، گزاره نادرست است.

ت) عدد صحیح مثبتی وجود دارد مانند x به طوری که $1 - 2x > 5$. $\exists x \in \mathbb{N}; 1 - 2x > 5$

چون گزاره سور وجودی دارد، باید برای حداقل یک عضو از مجموعه داده شده (\mathbb{N}) درست باشد.

گزاره نادرست است. $\Rightarrow x$ هیچ مقدار طبیعی ندارد. $1 - 2x > 5 \rightarrow 2x < -4 \xrightarrow{+2} x < -2 \Rightarrow$

ث) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش، بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است. $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}; x + \frac{1}{x} \geq 2$

گزاره سور عمومی دارد. پس در مجموعه داده شده ($\mathbb{R} - \{0\}$) نباید مثال نقض داشته باشد. اما اگر $x = -2$ قرار دهیم خواهیم داشت: $-2 + \frac{1}{-2} = -\frac{5}{2} \leq -2$ پس $x = -2$ ، مثال نقض برای گزاره داده شده است. بنابراین، گزاره نادرست است.



اگر $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ باشد داریم:

$$(1) \text{ اگر } x > 0 \text{ آنگاه } x + \frac{1}{x} \geq 2 \text{ و تساوی فقط وقتی رخ می دهد که } x = 1.$$

$$(2) \text{ اگر } x < 0 \text{ آنگاه } x + \frac{1}{x} \leq -2 \text{ و تساوی فقط وقتی رخ می دهد که } x = -1.$$

ج) به ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم $x^3 = x$. $\exists x \in \mathbb{R}; x^3 = x$

گزاره سور وجودی دارد. بنابراین باید بررسی کنیم که آیا معادله $x^3 = x$ در مجموعه داده شده (\mathbb{R}) حداقل یک جواب (ریشه) دارد یا خیر؟ بنابراین معادله را حل می کنیم:

$$x^3 = x \rightarrow x^3 - x = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 1 \text{ یا } x = -1$$

پس، معادله داده شده، در \mathbb{R} جواب دارد؛ بنابراین گزاره داده شده درست است.



۱۱) هرگاه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x \leq 5\}$ دامنه متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

ابتدا، مجموعه A را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

الف) $\exists x \in A; x + 4 = 10$: گزاره سور وجودی دارد، پس برای آنکه درست باشد، باید مجموعه جواب گزاره‌نمای $x + 4 = 10$ ، زیرمجموعه‌ای ناتهی از A باشد، یعنی حداقل برای یک مقدار از A درست باشد. بنابراین بهتر است معادله را حل کنیم:

$$x + 4 = 10 \rightarrow x = 6 \notin A$$

بنابراین، مجموعه جواب، \emptyset است، پس گزاره داده شده نادرست است.

ب) $\forall x \in A; x + 2 \leq 9$: گزاره، سور عمومی دارد، پس برای آنکه درست باشد، باید مجموعه جواب گزاره‌نمای $x + 2 \leq 9$ ، مجموعه A باشد (یعنی در مجموعه A ، مثال نقضی وجود نداشته باشد). نامعادله را حل می‌کنیم:

$$x + 2 \leq 9 \rightarrow x \leq 7$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، $x \leq 7$ برای تمامی مقادیر x در A برقرار است و مثال نقضی وجود ندارد. پس گزاره داده شده، درست است.

پ) $\exists x \in A; x + 3 \leq 4$: گزاره سور وجودی دارد، پس برای آنکه درست باشد، باید مجموعه جواب گزاره‌نمای $x + 3 \leq 4$ ، زیرمجموعه ناتهی از A باشد. بنابراین، نامعادله را حل می‌کنیم:

$$x + 3 \leq 4 \rightarrow x \leq 1$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، $x \leq 1$ برای دقیقاً یک مقدار در A ($x = 1$) برقرار است. پس مجموعه جواب گزاره‌نمای $x + 3 \leq 4$ ناتهی است، بنابراین گزاره داده شده درست است.

ت) $\forall x \in A; x + 1 \geq 6$: گزاره سور عمومی دارد، پس برای آنکه گزاره درست باشد، باید مجموعه جواب گزاره‌نمای $x + 1 \geq 6$ ، مجموعه A باشد. یعنی در A مثال نقض نداشته باشد. پس نامساوی را حل می‌کنیم:

$$x + 1 \geq 6 \rightarrow x \geq 5$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، $x \geq 5$ فقط برای $x = 5$ از A برقرار است و برای بقیه اعضای A برقرار نیست؛ بنابراین گزاره داده شده نادرست است.

۱۲) ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$: گزاره سور عمومی دارد، پس برای آنکه درست باشد، باید برای تمام اعضای مجموعه داده شده (\mathbb{R}) درست باشد و مثال نقضی نداشته باشد. اما به وضوح برای $x = 1$ برقرار نیست زیرا مخرج کسر را صفر می‌کند. پس $x = 1$ مثال نقضی برای این گزاره است، پس گزاره داده شده نادرست است.

$$\sim (\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1) \equiv \exists x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} \neq x + 1$$

نقیض:

ب) $\forall n \in \mathbb{N}; (2^n + 1) \in P$: گزاره سور عمومی دارد، پس گزاره داده شده نباید در مجموعه \mathbb{N} ، مثال نقض داشته باشد. (توجه کنیم که P ، مجموعه اعداد اول است). اما عدد $n = 6$ مثال نقض این گزاره است، زیرا:

$$2^6 + 1 = 65 \notin P$$

$$\sim (\forall n \in \mathbb{N}; (2^n + 1) \in P) \equiv \exists n \in \mathbb{N}; (2^n + 1) \notin P$$

نقیض:

پ) $\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2$: گزاره سور عمومی دارد، پس در مجموعه داده شده (بازه $(-\infty, 0)$) نباید مثال نقضی، موجود باشد. بنابراین، باید نامعادله را حل کنیم:

$$x - \frac{1}{x} \leq -2 \rightarrow x - \frac{1}{x} + 2 \leq 0 \rightarrow \frac{x^2 + 2x - 1}{x} \leq 0$$



$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(1)(-1) = 8 \rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{ریشه‌های صورت: } \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(-1 \pm \sqrt{2})}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

ریشهٔ مخرج: $x = 0$

عبارت	$-\infty$	$-1 - \sqrt{2}$	0	$-1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 + 2x - 1$	+	○	-	-	+
x	-	-	○	+	+
$\frac{x^2 + 2x - 1}{x}$	-	○	+	-	+

تعریف نشده

$$(-\infty, -1 - \sqrt{2}] \cup (0, -1 + \sqrt{2}]$$

پس جواب نامعادله عبارت است از:

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، قسمتی از مجموعهٔ داده شده در گزاره، در مجموعه جواب صدق نمی‌کند؛ بنابراین تمام اعضای بازهٔ $(-1 - \sqrt{2}, 0)$ ، مثال نقض برای گزاره داده هستند. پس، این گزاره، «نادرست» است.

$$\sim (\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2) \equiv \exists x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} > -2 \equiv x - \frac{1}{x} > -2$$

نقیض:

ت. $\exists y \in \mathbb{R}; \frac{y-3}{5} = 0$: گزاره سور وجودی دارد، پس باید برای حداقل یک y از \mathbb{R} ، درست باشد، از حل معادله داده شده داریم:

$$\frac{y-3}{5} = 0 \rightarrow y-3=0 \rightarrow y=3 \in \mathbb{R} \quad (\text{توجه کنیم که یک کسر وقتی برابر صفر است که صورت آن صفر باشد}).$$

بنابراین برای معادله داده شده، یک مقدار حقیقی یافت شد، پس گزاره درست است.

$$\sim (\exists y \in \mathbb{R}; \frac{y-3}{5} = 0) \equiv \forall y \in \mathbb{R}; \frac{y-3}{5} \neq 0$$

نقیض:

آمار و احتمال

فصل ۱

درس دوم: مجموعه - زیر مجموعه

یادآوری

مجموعه را با حروف بزرگ انگلیسی مثل A, B و ... و اعضای مجموعه را با حروف کوچک انگلیسی مثل a, b و ... نمایش می‌دهند. اگر مجموعه A مجموعه‌ای دلخواه باشد:

۱- اگر a عضوی از مجموعه A باشد، در این صورت می‌نویسیم $a \in A$. در غیر این صورت می‌نویسیم $a \notin A$. توجه کنید که اعضای یک مجموعه، خود می‌توانند مجموعه باشند. به‌طور مثال اگر $A = \{\emptyset, 1, \{2\}\}$ باشد آنگاه:

$$\emptyset \in A, 1 \in A, \{2\} \in A, 2 \notin A, \{1\} \notin A$$

۲- اگر مجموعه B ، مجموعهٔ دلخواهی باشد. در این صورت می‌گوییم «مجموعه B زیرمجموعه A است اگر و تنها اگر همهٔ اعضای مجموعه B عضو مجموعه A باشند»، در این صورت می‌نویسیم: $B \subseteq A$.

تذکره

۱- طرفین علامت زیرمجموعه (\subseteq) باید مجموعه باشند و عباراتی مثل $2 \subseteq A$ بی‌معنی است.

۲- به انتفاء مقدم، تهی زیرمجموعه A است ($\emptyset \subseteq A$).

۳- A زیرمجموعه خودش است ($A \subseteq A$).

۴- اگر $a \in A$ آنگاه $\{a\} \subseteq A$ و برعکس.