



درس اول: چند اتحاد جبری و کاربردها

کاردکلاس

صفحه ۱۰ کتاب درسی

با استفاده از اتحادهای بالا، تساویهای زیر را کامل کنید.

(الف) $(a+4)^2 = a^2 + 8a + 16$ (اتحاد مربع دوجمله‌ای)

(ب) $(3a-1)^2 = 9a^2 - 6a + 1$ (اتحاد مربع دوجمله‌ای)

(پ) $(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}b)^2 = 2 + 2b + \frac{1}{2}b^2$ (اتحاد مربع دوجمله‌ای)

(ت) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3 - 2 = 1$ (اتحاد مزدوج)

(ث) $(x+4)(x+3) = x^2 + (4+3)x + (4)(3) = x^2 + 7x + 12$ (اتحاد جمله مشترک)

(ج) $(3x+2)(3x-5) = (3x)^2 + (2-5)(3x) + (-5)(2) = 9x^2 - 9x - 10$ (اتحاد جمله مشترک)

(چ) $(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$ (اتحاد جمله مشترک)

کاردکلاس

صفحه ۱۰ و ۱۱ کتاب درسی

با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای، اتحاد مزدوج و اتحاد جمله مشترک، عبارات جبری زیر را تجزیه کنید.

(الف) $9x^2 - 16 = (3x-4)(3x+4)$

(ب) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = x^2 + 2(\frac{1}{3})x + (\frac{1}{3})^2 = (x + \frac{1}{3})^2$

(پ) $4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 - 2(2x)(1) + (1)^2 = (2x-1)^2$

(ت) $y^2 + 3y - 10 = y^2 + (5-2)y - (5)(2) = (y-2)(y+5)$

(ث) $9x^2 + 18x + 8 = (3x)^2 + 6 \times (3x) + 8 = (3x)^2 + (2+4)(3x) + (2)(4) = (3x+2)(3x+4)$

کاردکلاس

صفحه ۱۱ کتاب درسی

عبارات جبری زیر را به صورت ساده‌ترین حالت، تجزیه کنید.

نکته

به منظور ساده کردن هر عبارت، کافی است ابتدا از عوامل مشترک اجزای آن فاکتور گرفته و سپس با استفاده از اتحادهای جبری، آن را به ساده‌ترین حالت تجزیه کرد.

(الف) $12x^5(x^2+6)^3 - 8x^5(x^2+6)^4 = 4x^5(x^2+6)^3(3x^2-2(x^2+6))$

$= 4x^5(x^2+6)^3(x^2-12) = 4x^5(x^2+6)^3(x-\sqrt{12})(x+\sqrt{12})$

(ب) $x^8 - 64x^4 = x^4(x^4-64) = x^4(x^2-8)(x^2+8) = x^4(x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8})(x^2+8)$



صفحه ۱۱ کتاب درسی

کاردر کلاس

بعضی از محاسبات عددی را می‌توان با کمک اتحادها، به راحتی انجام داد. تساوی‌های زیر را کامل کنید.

نکته

برای محاسبه $(10000)^n$ کافی است تعداد صفرها را n برابر کنیم. مثلاً:

$$(100)^3 = \underbrace{1000000}_{\substack{\text{۶ تا صفر} \\ \text{۲ تا صفر}}}$$

الف) $(999)^2 = (1000 - 1)^2 = 1000^2 - 2(1000)(1) + 1^2 = 1000000 - 2000 + 1 = 998001$

ب) $96 \times 104 = (100 - 4)(100 + 4) = 100^2 - 4^2 = 10000 - 16 = 9984$

پ) $102^2 = (100 + 2)^2 = 100^2 + 2(100)(2) + 2^2 = 10404$

ت) خودتان نیز یک مثال عددی بنویسید که برای محاسبه آن از اتحادها، کمک گرفته‌اید.

$202 \times 198 = (200 + 2)(200 - 2) = 40000 - 4 = 39996$

ث) آیا کاربرد دیگری از اتحادها، به ذهن شما می‌رسد؟ لطفاً توضیح دهید. به مثلاً محاسبه اختلاف توان دوم‌های دو عدد.

$298^2 - 198^2 = (298 - 198)(298 + 198) = 100 \times 496 = 49600$

برای مثال:

ریاضی

فصل ۱

صفحه ۱۲ کتاب درسی

کاردر کلاس

عبارت جبری $(a+b)^3$ را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای و حاصل ضرب عبارتهای جبری ساده کنید.

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + \underline{a^2b} + \underline{2ab^2} + \underline{b^3} = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

برای ساده کردن $(a+b)^4$ ، چگونه عمل می‌کنید؟ می‌توان $(a+b)^4$ را به صورت $(a+b)^3(a+b)$ نوشت و حاصل را محاسبه کرد.

آیا این پرسش را می‌توان برای توان‌های بزرگ‌تر از ۴ نیز طرح کرد؟ به آیا روشی وجود دارد که بتوان بدون ساده کردن عبارتهای حاصل ضرب، جواب نهایی را به دست آورد؟ می‌توانیم از مثلث خیام استفاده کنیم.

صفحه ۱۲ و ۱۳ کتاب درسی

فعالیت

یادآوری

$$x^0 = 1, (x \neq 0)$$

حاصل هر عدد (غیر صفر) به توان صفر برابر ۱ است.

جدول زیر را در نظر بگیرید.

۱	$(a+b)^0 = 1$
۱ ۱	$(a+b)^1 = 1a + 1b$
۱ ۲ ۱	$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
۱ ۳ ۳ ۱	$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
۱ ۴ ۶ ۴ ۱	$(a+b)^4 = \boxed{1}a^4 + \boxed{4}a^3b + \boxed{6}a^2b^2 + \boxed{4}ab^3 + \boxed{1}b^4$
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱	$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
⋮	⋮



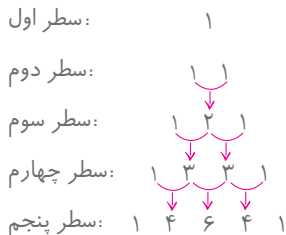
۱ در جدول بالا سمت چپ (مثلث خیام)، چه ارتباطی بین سطر دوم و سطر سوم وجود دارد؟ با جمع کردن دو عدد کنار هم در سطر دوم می‌توان به اعداد سطر سوم (به جز ۱ها که همیشه ابتدا و انتهای سطرها نوشته می‌شوند) رسید.

چه ارتباطی بین سطر سوم و سطر چهارم وجود دارد؟

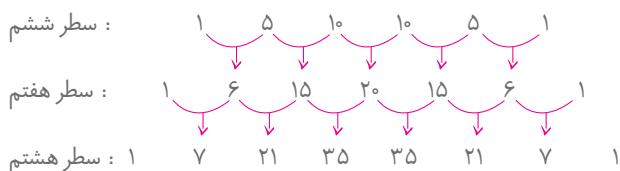
با جمع کردن هر دو عدد کنار هم در سطر سوم می‌توان به اعداد سطر چهارم رسید.

چه رابطه‌ای بین سطر چهارم و سطر پنجم وجود دارد؟

با جمع کردن هر دو عدد کنار هم در سطر چهارم می‌توان به اعداد سطر پنجم رسید. به شکل زیر نگاه کنید:



۲ آیا می‌توانید سطرهای هفتم و هشتم را کامل کنید؟



۳ چه ارتباطی بین سطرهای واقع در مثلث خیام و ضرایب عبارت‌های جبری سطرهای جدول بالا در سمت راست وجود دارد؟

ضرایب هر جمله در عبارت‌های جبری، همان اعداد حاصل از مثلث خیام هستند.

۴ آیا می‌توانید ضرایب $(a+b)^4$ را در جدول سمت راست، کامل کنید؟

بله، به کمک اعداد سطر پنجم مثلث خیام می‌توان این کار را انجام داد. در جدول داده‌شده آنها را نشان داده‌ایم.

$$\text{سطر پنجم: } 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \Rightarrow (a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

۵ آیا می‌توانید توان‌های a و b در عبارت $(a+b)^5$ در جدول سمت راست را کامل کنید؟

بله، در اولین جمله توان a ، برابر ۵ و توان b ، برابر با صفر است ($b^0 = 1$) و به ترتیب در جمله‌های بعدی از توان‌های a یکی کم و به توان‌های b اضافه می‌شود. در جدول داده‌شده آنها را نشان داده‌ایم.

۶ آیا توانسته‌اید حدس بزنید که چه ارتباطی بین اعداد سطرهای واقع در مثلث خیام و ضرایب توان‌های $(a+b)$ وجود دارد؟

اعداد سطر $(n+1)$ ام مثلث خیام، ضرایب حاصل عبارت جبری $(a+b)^n$ هستند.

۷ با توجه به اینکه $a-b = a+(-b)$ ، حاصل عبارت $(a-b)^3$ را براساس اتحاد $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ به دست آورید.

$$(a-b)^3 = (a+(-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$



به عنوان یک نتیجه از مثلث خیام، می‌توان اتحادهای زیر را نوشت:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



کاردرکلاس

صفحه ۱۳ کتاب درسی

با استفاده از اتحادهای بالا، تساویهای زیر را کامل کنید:

الف) $(2a+1)^3 = 8a^3 + 3(2a)^2(1) + 6a + 1^3 = 8a^3 + 12a^2 + 6a + 1$

ب) $(\frac{1}{3}a-2)^3 = (\frac{1}{3}a)^3 - 3(\frac{1}{3}a)^2(2) + 3(\frac{1}{3}a)(2)^2 - 8 = \frac{1}{27}a^3 - \frac{2}{3}a^2 + 4a - 8$

پ) $(4a-2b)^3 = (4a)^3 - 3(4a)^2(2b) + 3(4a)(2b)^2 - 8b^3 = 64a^3 - 96a^2b + 48ab^2 - 8b^3$

ت) $(3a+\frac{1}{4})^3 = 27a^3 + 3(3a)^2(\frac{1}{4}) + 3(3a)(\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{64} = 27a^3 + \frac{27}{4}a^2 + \frac{9}{8}a + \frac{1}{64}$

خواندنی

صفحه ۱۴ کتاب درسی

در تساویهای زیر، به جای علامت سؤال، عدد مناسب قرار دهید:

$$1 = 2^0$$

$$1+1=2^1 \Rightarrow 2=2^1 \Rightarrow ?=1$$

$$1+2+1=2^2 \Rightarrow 4=2^2 \Rightarrow 2^2=2^2 \Rightarrow ?=2$$

$$1+3+3+1=2^3 \Rightarrow 8=2^3 \Rightarrow 2^3=2^3 \Rightarrow ?=3$$

$$1+4+6+4+1=2^4 \Rightarrow 16=2^4 \Rightarrow 2^4=2^4 \Rightarrow ?=4$$

- چه ارتباطی بین توانهای عدد ۲ و سطرهای واقع در مثلث خیام وجود دارد؟

مجموع اعداد سطر اول برابر 2^0 ، مجموع اعداد سطر دوم، برابر 2^1 ، ... و مجموع اعداد سطر n ام برابر با 2^{n-1} می شود. مثلاً مجموع اعداد سطر چهارم $2^3 = 8$ می شود.

- آیا می توانید الگویی برای توانهای عدد ۲، برحسب سطرهای واقع در مثلث خیام حدس بزنید؟

با توجه به مطالب گفته شده داریم: 2^{n-1} = مجموع اعداد سطر n ام مثلث خیام

این حدس برای محاسبه 2^n با قرار دادن $a=b=1$ در تساوی زیر اثبات می شود.

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \dots + nab^{n-1} + b^n$$

- آیا همیشه این روش (حدس زدن با توجه به مشاهده چند الگو) برای نتیجه گیریهای کلی، صحیح است؟ به مثال زیر توجه کنید.

$$11^0 = 1$$

$$11^1 = 11$$

$$11^2 = (1+10)^2 = 1+2 \times 10 + 10^2 = 1+20+100 = 121$$

$$11^3 = (1+10)^3 = 1^3 + 3 \times 10 + 3 \times 10^2 + 10^3 = 1+30+300+1000 = 1331$$

$$11^4 = (1+10)^4 = 1+4 \times 10 + 6 \times 10^2 + 4 \times 10^3 + 10^4 = 14641$$

- چه ارتباطی بین توان به دست آمده در 11^2 و اعداد واقع در سطر سوم مثلث خیام وجود دارد؟ اگر اعداد سطر سوم مثلث و

خیام را کنار هم قرار دهیم حاصل 11^2 به دست می آید. ببینید:

$$11^2 = 121 \rightarrow \begin{array}{ccc} & \text{کنار هم گذاشتن} & \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \quad \text{سطر سوم}$$



خبر لائىڭمەت.com

- چه ارتباطی بین توان به دست آمده در 11^3 و اعداد واقع در سطر چهارم مثلث خیام وجود دارد؟
اگر اعداد سطر چهارم را کنار هم قرار دهیم، حاصل 11^3 به دست می آید.

- چه ارتباطی بین توان به دست آمده در 11^4 و اعداد واقع در سطر پنجم مثلث خیام وجود دارد؟ اگر اعداد سطر پنجم را کنار هم قرار دهیم، حاصل 11^4 به دست می آید.

۱۱۵ را با ماشین حساب محاسبه کنید و با ضرایب موجود در سطر نشم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حاصل 11^5 برابر با 161051 می‌شود؛ اما اگر عددهای سطر پنجم مثلث خیام را در کنار هم قرار دهیم، عدد 1510151 به دست می‌آید که با نتیجه به دست آمده از محاسبه با استفاده از ماشین حساب متفاوت است. بنابراین نمی‌توان همیشه با استفاده از روش حدس زدن به یک نتیجه‌گیری کلی رسید. برای پیدا کردن الگوی درست باید به اعداد دو رقمی، سه‌رقمی و... تولیدشده در مثلث خیام توجه کنیم. برای اعداد دو رقمی کافی است یکان را بنویسیم و دهگان را به رقم قبلی (سمت چپ) اضافه کنیم؛ مثلاً در سطر ششم 14 ها دو رقمی هستند، پس به این ترتیب عمل می‌کنیم:

سطر ششم: $1 \ 5 \ 1 \cdot \ 1 \cdot \ 5 \ 1 \rightarrow 1 \ 6 \cdot \ 1 \cdot \ 5 \ 1 \rightarrow 1 \ 6 \ 1 \cdot \ 5 \ 1 \Rightarrow 11^5 = 161 \cdot 51$

ریاضی

کارد ر کلاس صفحه ۱۵ کتاب درسی

طرف را نشان دهید. سپس عبارت کلامی این اتحادها را بنویسید.

$$(a-b)(a^{\text{Y}}+ab+b^{\text{Y}})=a^{\text{Y}}-b^{\text{Y}}$$

اتحاد تفاضل مکعب دو جمله‌ای

$$(a-b)(a^r+ab+ b^r) = a^r + a^r b + ab^r - ba^r - ab^r - b^r = a^r - b^r$$

تفاضل مکعب‌های دو عدد برابر است با حاصل ضرب تفاضل دو عدد در مجموع حاصل ضرب دو عدد و مربع‌های آنها.

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای

$$(a+b)(a^r-ab+b^r)=a^r-a^rb+ab^r+ba^r-ab^r+b^r=a^r+b^r$$

مجموع مکعب‌های دو عدد برابر است با حاصل ضرب مجموع دو عدد در حاصل مجموع مربع‌ها و قرینه حاصل ضرب آن دو عدد.

فعاليات

با استفاده از اتحادهای بالا، عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

$$\Lambda y^r - 1 = (Yy)^r - 1^r = (Yy - 1)((Yy)^r + (Yy) + 1^r) = (Yy - 1)(\ell y^r + Yy + 1)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{a}^T + \mathbf{I} = (\mathbf{Y}\mathbf{a})^T + \mathbf{I}^T = (\mathbf{Y}\mathbf{a} + \mathbf{I})(\mathbf{Y}\mathbf{a})^T - (\mathbf{Y}\mathbf{a})(\mathbf{I}) + \mathbf{I} = (\mathbf{Y}\mathbf{a} + \mathbf{I})(\mathbf{Y}\mathbf{a}^T - \mathbf{Y}\mathbf{a} + \mathbf{I})$$

$$\lambda \mathbf{a}^{\top} + \mathbf{b}^{\top} = (\gamma \mathbf{a})^{\top} + \mathbf{b}^{\top} = (\gamma \mathbf{a} + \mathbf{b})(\gamma \mathbf{a}^{\top} - \gamma \mathbf{a} \mathbf{b}^{\top} + \mathbf{b}^{\top}) = (\gamma \mathbf{a} + \mathbf{b})(\gamma \mathbf{a}^{\top} - \gamma \mathbf{a} \mathbf{b}^{\top} + \mathbf{b}^{\top})$$

$$t^{\frac{r}{\epsilon}} - \frac{1}{\lambda} = (t^{\frac{r}{\epsilon}})^{\frac{r}{\epsilon}} - (\frac{1}{\lambda})^{\frac{r}{\epsilon}} = (t^{\frac{r}{\epsilon}} - \frac{1}{\lambda})((t^{\frac{r}{\epsilon}})^{\frac{r}{\epsilon}} + (t^{\frac{r}{\epsilon}})(\frac{1}{\lambda}) + (\frac{1}{\lambda})^{\frac{r}{\epsilon}}) = (t^{\frac{r}{\epsilon}} - \frac{1}{\lambda})(t^{\frac{r}{\epsilon}} + \frac{1}{\lambda}t^{\frac{r}{\epsilon}} + \frac{1}{\lambda})$$



تمرین

صفحه ۱۵ و ۱۶ کتاب درسی

۱ با استفاده از اتحادها، حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$$(x-1)^2 = x^2 - 2(x)(1) + 1^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$(y + \frac{1}{y})^2 = y^2 + 2(y)(\frac{1}{y}) + (\frac{1}{y})^2 = y^2 + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2}$$

$$(2 - \frac{a}{3})^2 = 2^2 - 2(2)(\frac{a}{3}) + (\frac{a}{3})^2 = 4 - \frac{4}{3}a + \frac{a^2}{9}$$

$$(b-2)^3 = b^3 - 3(b)^2(2) + 3(b)(2)^2 - (2)^3 = b^3 - 6b^2 + 12b - 8$$

$$(2z - \frac{1}{z})^3 = (2z)^3 - 3(2z)^2(\frac{1}{z}) + 3(2z)(\frac{1}{z})^2 - (\frac{1}{z})^3 = 8z^3 - 6z^2 + \frac{6}{z} - \frac{1}{z^3}$$

۲ با استفاده از اتحادها، در قسمت‌های نقطه چین، عبارت مناسب بگذارید.

$$(a + \sqrt{2})^2 = a^2 + 2a\sqrt{2} + 2$$

$$(1-2x)^2 = 1 - 4x + (2x)^2 = 1 - 4x + 4x^2$$

$$(\sqrt{3} + x)^3 = 3\sqrt{3} + 3(\sqrt{3})^2(x) + 3\sqrt{3}x^2 + x^3 = 3\sqrt{3} + 9x + 3\sqrt{3}x^2 + x^3$$

۳ به کمک اتحادها، عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^6 - 1 = (x^2)^3 - 1^3 = (x^2 - 1)((x^2)^2 + (1)(x^2) + 1^2) = (x-1)(x+1)(x^2 + x^2 + 1)$$

$$1 + z^3 = (1 + z)(1^2 - (1)(z) + z^2) = (1 + z)(1 - z + z^2)$$

$$8 - t^6 = 2^3 - (t^2)^3 = (2 - t^2)(2^2 + (2)(t^2) + (t^2)^2) = (2 - t^2)(4 + 2t^2 + t^4)$$

$$9x^2 - 6x + 1 = (3x)^2 - 2(3x) + 1 = (3x - 1)^2$$

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (2+3)x + (2)(3) = (x+2)(x+3)$$

$$4x^2 + 14x + 12 = (2x)^2 + 7(2x) + 12 = (2x)^2 + (3+4)(2x) + (3)(4) = (2x+3)(2x+4)$$

۴ با استفاده از اتحاد مجموع مکعب دوجمله‌ای یا اتحاد تفاضل مکعب، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(x+2)(x^2-2x+4) = (x+2)(x^2-(2)(x)+2^2) = x^3 - 2^3 = x^3 - 8$$

$$(7x-2)(49x^2+14x+4) = (7x-2)((7x)^2+(2)(7x)+2^2) = (7x)^3 - 2^3 = 343x^3 - 8$$

۵ عبارت‌های جبری زیر را به ساده‌ترین عبارت‌ها تجزیه کنید.

$$\text{الف } 12x^6(x^2+5)^3 - 10x^6(x^2+5)^2 = (6x^3)(2x^3)(x^2+5)^3 - 5(x^2+5)(2x^3)(x^2+5)^2$$

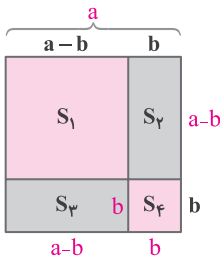
$$= 2x^3(x^2+5)^2(6x^3 - 5(x^2+5)) = 2x^3(x^2+5)^2(6x^3 - 5x^2 - 25)$$

$$= 2x^3(x^2+5)^2(x^2-25) = 2x^3(x^2+5)^2(x-5)(x+5)$$

$$\text{ب } x^8 - 625x^4 = x^4(x^4 - 625) = x^4(x^4 - 5^4) = x^4(x^2 - 5^2)(x^2 + 5^2) = x^4(x-5)(x+5)(x^2+25)$$



۶ مربع روبه‌رو را که اندازه ضلع آن a است، در نظر بگیرید و فرض کنید مساحت آن برابر S است. ضلع آن را به دو پاره‌خط تقسیم کنید و طول یکی را b در نظر بگیرید.



$$S_1 = (a - b)(a - b) = (a - b)^2$$

$$S_2 = b(a - b) = ab - b^2$$

$$S_3 = (a - b)b = ab - b^2$$

$$S_4 = b \times b = b^2$$

ب) مساحت S را برحسب مساحت‌های S_1 ، S_2 ، S_3 و S_4 به دست آورید.

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = (a - b)^2 + ab - b^2 + ab - b^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab - b^2$$

پ) اتحاد مربع دوجمله‌ای را از قسمت (ب) نتیجه بگیرید.

می‌دانیم مساحت کل مربع برابر $S = a^2$ است، بنابراین با توجه به نتیجه قسمت قبل داریم:

$$a^2 = (a - b)^2 + 2ab - b^2 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$\Rightarrow \text{اتحاد مربع دوجمله‌ای: } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

۷ با استفاده از اتحادهایی که آموختید، عبارت‌های عددی زیر را به دست آورید.

$$(1001)^3 = (1000 + 1)^3 = 1000^3 + 3(1000)^2(1) + 3(1000)(1)^2 + 1^3$$

$$= 1000000000 + 3(1000000) + 3000 + 1 = 1003003001$$

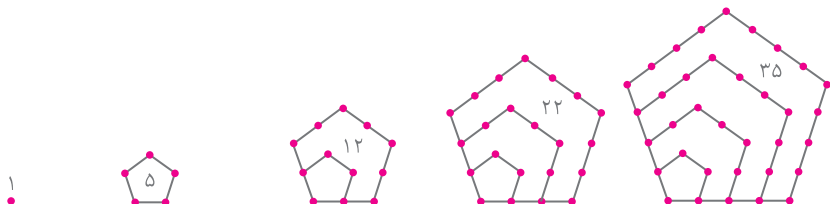
$$(99)^3 = (100 - 1)^3 = 100^3 - 3(100)^2(1) + 3(100)(1)^2 - 1^3 = 1000000 - 30000 + 300 - 1 = 970299$$

خواندنی صفحه ۱۷ کتاب درسی

چگونه می‌توانید ارتباط بین اعداد مثلثی، اعداد مربعی و اعداد مخمسی را از طریق مثلث خیام به دست آورید؟

مجموع هر عدد مثلثی و دو برابر عدد مثلثی قبل از آن مساوی است با عدد مخمسی همان مرتبه؛ یا به عبارت دیگر مجموع هر عدد مربعی و عدد مثلثی قبل از آن برابر با عدد مخمسی همان مرتبه است.

اعداد مثلثی:	۱	۳	۶	۱۰	۱۵
اعداد مربعی:	۱	۴	۹	۱۶	۲۵
اعداد مخمسی:	$1 + 2 \times 0 = 1$	$3 + 2 \times 1 = 5$	$6 + 2 \times 3 = 12$	$10 + 2 \times 6 = 22$	$15 + 2 \times 10 = 35$
	$1 + 0 = 1$	$4 + 1 = 5$	$9 + 3 = 12$	$16 + 6 = 22$	$25 + 10 = 35$





درس دوم: عبارت‌های گویا

صفحه ۱۸ کتاب درسی

فعالیت

عبارت‌های گویا را با $\checkmark$ و عبارت‌های غیرگویا را با $\times$ مشخص کنید.

نکته

کسرهایی که صورت و مخرج آنها چندجمله‌ای باشند، عبارت‌های گویا نامیده می‌شوند. در عبارت‌های گویا، متغیر نمی‌تواند داخل رادیکال یا قدرمطلق قرار بگیرد. (دقت کنید اگر اعداد زیر رادیکال باشند، مشکلی وجود ندارد). مثلاً $\frac{2}{\sqrt{x}}$ گویا نیست، ولی $\frac{\sqrt{2}}{x}$ گویاست.

$\sqrt{x^2+1} \quad \times$

$\frac{1}{x^4-\sqrt{2}} \quad \checkmark$

$\frac{x-3}{2x^2-3x+5} \quad \checkmark$

$\frac{x+y}{3\sqrt{z}} \quad \times$

$\frac{\sqrt{5x}}{x} \quad \checkmark$

$x^2+3x-4 \quad \checkmark$

$\frac{x^2-1}{x+1} \quad \checkmark$

$\sqrt{x} \quad \times$

$\frac{|x|}{x^2+2} \quad \times$

ریاضی

فصل ۱

صفحه ۱۹ کتاب درسی

کار در کلاس

کدام یک از عبارت‌های زیر گویا و کدام یک غیرگویا هستند؟ عبارت‌های گویا به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده‌اند؟

الف) $\frac{3z+5}{3z-5}$: $3z-5=0 \Rightarrow 3z=5 \Rightarrow z=\frac{5}{3} \Rightarrow z=\frac{5}{3}$ تعریف نشده است. $z=\frac{5}{3}$ به ازای $z=\frac{5}{3}$ گویاست و به ازای $z=\frac{5}{3}$

ب) $\frac{x+9}{\sqrt{x-3}}$: به علت وجود $\sqrt{x}$ در مخرج، عبارت گویا نیست.

پ) $\frac{4x^2-5x+1}{y\sqrt{2}}$: زیرا مخرج کسر هیچ‌گاه صفر نمی‌شود. $y\sqrt{2}$

ت) $\frac{a^2+3}{a^2-4}$: $a^2-4=0 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2 \Rightarrow a=2$ و $a=-2$ تعریف نشده است.

ث) $\frac{x\sqrt{x+1}}{3-x}$: به علت وجود $\sqrt{x}$ در صورت کسر، عبارت گویا نیست.

ج) $\frac{5x^2+1}{x^2+1}$: $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow$ غیرممکن است. x^2+1

صفحه ۱۹ و ۲۰ کتاب درسی

کار در کلاس

۱) مانند نمونه‌های حل شده، کسره‌ای زیر را ساده کنید.

صورت کسر را به کمک اتحاد تفاضل مکعب دوجمله‌ای و مخرج کسر را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کنید.

ب) $\frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$

با شرط $x-1 \neq 0$ از صورت و مخرج کسر عامل $(x-1)$ را خط بزنید. توجه کنید که برای بامعنی بودن کسر باید $x+1 \neq 0$ باشد.

$= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1}$ (ساده شده کسر)



اتحاد تفاضل مکعب دوجمله‌ای

$$\text{پ) } \frac{x^3 - 8x}{2x^2 - 8x + 8} = \frac{x(x^2 - 8)}{2(x^2 - 4x + 4)} = \frac{x \overbrace{(x^3 - 2^3)}^{\text{اتحاد تفاضل مکعب دوجمله‌ای}}}{2 \underbrace{(x^2 - 4x + 4)}^{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}}} = \frac{x(x-2)(x^2+2x+4)}{2(x-2)^2} = \frac{x(x^2+2x+4)}{2(x-2)}, x \neq 2$$

۲) کسر زیر به صورت نادرست ساده شده است. ایراد آن را پیدا کنید و درباره آن توضیح دهید.

$$\frac{2x^3 + y^2}{y^2} = \frac{2x^3 + \cancel{y^2}}{\cancel{y^2}} = 2x^3 + 1$$

وقتی بین دو عبارت در صورت کسر علامت ضرب وجود داشته باشد می‌توان عبارات مشابه را در صورت و مخرج با هم ساده کرد؛ ولی اگر در صورت کسر بین عبارات علامت جمع یا تفریق باشد، نمی‌توان دو عبارت مشابه را در صورت و مخرج با هم ساده کرد.

۳) فرض کنیم $x = 1$ است. دانش‌آموزی با توجه به این فرض، ثابت کرده است که $2 = 1$ است. استدلال زیر را دنبال کنید و بگویید اشتباه در کجا اتفاق افتاده است. مرحله به مرحله پیش می‌رویم:

$$x = 1$$

فرض اولیه صحیح است.

$$x^2 = x$$

بنابراین می‌توانیم دو طرف تساوی بالا را در x ($x \neq 0$) ضرب کنیم.

$$x^2 - 1 = x - 1$$

می‌توانیم دو طرف تساوی را با عدد -1 جمع کنیم.

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{x - 1}{x - 1}$$

اشتباه در این قسمت رخ داده است. چون اگر $x = 1$ باشد، $x - 1 = 0$ می‌شود و نمی‌توانیم دو طرف تساوی را بر عدد صفر تقسیم کنیم.

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 1$$

$$x + 1 = 1 \xrightarrow{x=1} 2 = 1$$

فعالیت

صفحه ۲۱ کتاب درسی

چندجمله‌ای‌های $P(x) = x^2 - 2x + 1$ و $Q(x) = x^2 + 5x - 6$ را در نظر بگیرید.

۱) چندجمله‌ای‌های بالا را تجزیه کنید.

$$P(x) = x^2 - 2x + 1 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} (x-1)^2$$

$$Q(x) = x^2 + 5x - 6 = x^2 + (-1+6)x + (-1)(6) \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x-1)(x+6)$$

۲) عبارت‌های مشترک در تجزیه این دو چندجمله‌ای را مشخص کنید. در هر دو چندجمله‌ای عبارت $(x-1)$ مشترک است.

۳) عبارت‌های غیرمشترک در تجزیه این دو چندجمله‌ای را مشخص کنید. $(x+6)$ فقط در $Q(x)$ وجود دارد.

۴) حاصل ضرب عبارت‌های مشترک با بزرگ‌ترین توان را در عبارت‌های غیرمشترک پیدا کنید و آن را $A(x)$ بنامید.

$$A(x) = (x-1)^2(x+6)$$

۵) عبارت‌های $\frac{A(x)}{Q(x)}$ و $\frac{A(x)}{P(x)}$ را ساده کنید.

$$\frac{A(x)}{P(x)} = \frac{\cancel{(x-1)^2}(x+6)}{\cancel{(x-1)^2}} = x+6$$

$$\frac{A(x)}{Q(x)} = \frac{\cancel{(x-1)^2}\cancel{(x+6)}}{\cancel{(x-1)}(x+6)} = x-1$$



۶ با توجه به قسمت قبل آیا $A(x)$ مضرب مشترک دو عبارت $P(x)$ و $Q(x)$ است؟ بله

۷ آیا می‌توانید مضرب‌های مشترک دیگری برای $P(x)$ و $Q(x)$ پیدا کنید؟

بله، حاصل ضرب $A(x)$ در هر چند جمله‌ای دیگر، باز هم مضرب مشترک $P(x)$ و $Q(x)$ خواهد بود.

$$A'(x) = (x-1)^2(x+7)(x+6) \quad \text{یا} \quad A''(x) = (x-1)^2(x+6)^2$$

۸ از بین مضرب‌های مشترکی که برای $P(x)$ و $Q(x)$ یافتید، کدام یک کوچک‌ترین مضرب مشترک است؟

درجه $A(x)$ نسبت به x از همه کمتر است و بقیه مضرب‌های مشترک $P(x)$ و $Q(x)$ را می‌توان به صورت مضربی از $A(x)$ نوشت.

کار در کلاس

صفحه ۲۲ کتاب درسی

۱ در هر قسمت کوچک‌ترین مضرب مشترک چند جمله‌ای‌های داده‌شده را به دست آورید.

$$\left. \begin{array}{l} P(x) = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 \\ Q(x) = x^2 - 9 = (x-3)(x+3) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{کوچک‌ترین مضرب مشترک} : A(x) = (x-3)(x+3)^2$$

$$P(x) = x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2 + 1)$$

$$Q(x) = x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$\Rightarrow \text{کوچک‌ترین مضرب مشترک} : A(x) = (x-1)(x+1)(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$$

۲ برای جمع و تفریق عبارت‌های گویا، ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم. در زیر، مخرج مشترک کسرها را مانند نمونه پیدا کنید.

$$\text{ب) } \frac{x-2}{x-3} - \frac{x+1}{x+2}$$

$$\text{مخرج مشترک} = (x-3)(x+2) \quad B(x) = x+2 \quad \text{مخرج کسر دوم} \quad A(x) = x-3 \quad \text{مخرج کسر اول}$$

صفحه ۲۲ و ۲۳ کتاب درسی

فعالیت

عبارت $P(x) = \frac{4}{x^2+x} + \frac{x}{x^2-1}$ را در نظر بگیرید. با توجه به «کار در کلاس» قبل، مخرج مشترک این دو کسر برابر است با:

$$\text{مخرج مشترک} = x(x-1)(x+1)$$

$$P(x) = \frac{4}{x(x+1)} + \frac{x}{(x-1)(x+1)}$$

زیرا:

۱ مخرج کسر اول را با مخرج مشترک مقایسه کنید. برای اینکه مخرج کسر اول مانند مخرج مشترک شود، باید صورت و مخرج کسر اول را در چه عبارتی ضرب کرد؟

$$\frac{x(x-1)(x+1)}{x(x+1)} = x-1$$

برای پیدا کردن عبارت مورد نظر باید مخرج مشترک را بر مخرج کسر اول تقسیم کنیم.

بنابراین باید صورت و مخرج کسر اول را در $x-1$ ضرب کنیم.

$$\frac{4}{x(x+1)} = \frac{4}{x(x+1)} \times \frac{(x-1)}{(x-1)} = \frac{4(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

این کار را انجام دهید.

۲ برای اینکه مخرج کسر دوم مانند مخرج مشترک شود، باید صورت و مخرج کسر دوم را در کدام عبارت ضرب کرد؟

$$\frac{x \cancel{(x-1)} \cancel{(x+1)}}{\cancel{(x-1)} \cancel{(x+1)}} = x$$

این بار مخرج مشترک را بر مخرج کسر دوم تقسیم می‌کنیم.

بنابراین باید صورت و مخرج کسر دوم را در x ضرب کنیم.



این کار را انجام دهید.

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} \times \frac{x}{x} = \frac{x^2}{x(x-1)(x+1)}$$

همان طور که می بینید، مخرج کسره های اول و دوم یکسان شده اند. در زیر، این دو کسر را با هم جمع کرده ایم، جای خالی را پر کنید.

$$P(x) = \frac{4(x-1) + x^2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{4x - 4 + x^2}{x(x-1)(x+1)}$$

صفحه ۲۳ کتاب درسی

کار در کلاس

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$

می دانیم مخرج مشترک این دو کسر برابر است با: $(x+1)(x-1)$ ؛ بنابراین داریم:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1+x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{x^2-1}$$

ب) $\frac{y+8}{y^2+y-2} + \frac{y-2}{y^2+2y} = \frac{y+8}{(y+2)(y-1)} + \frac{y-2}{y(y+2)} = \frac{y(y+8)}{y(y+2)(y-1)} + \frac{(y-2)(y-1)}{y(y+2)(y-1)} = \frac{y^2+8y+y^2-3y+2}{y(y+2)(y-1)}$

$$= \frac{2y^2+5y+2}{y(y+2)(y-1)} = \frac{(2y+1)(y+2)}{y(y+2)(y-1)} \stackrel{y \neq -2}{=} \frac{2y+1}{y(y-1)}$$

پ) $\frac{4+x^2-2x}{2+x} - x-2 = \frac{4+x^2-2x}{2+x} + \frac{-x-2}{1} = \frac{4+x^2-2x}{x+2} + \frac{-(x+2)(x+2)}{x+2} = \frac{4+x^2-2x-(x^2+4x+4)}{x+2}$

$$= \frac{\cancel{4} + \cancel{x^2} - 2x - \cancel{x^2} - 4x - \cancel{4}}{x+2} = \frac{-6x}{x+2}$$

ت) $\frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{x^2-1} - \frac{2x-3}{2x+2} = \frac{2x+3}{2(x-1)} - \frac{5}{(x-1)(x+1)} - \frac{2x-3}{2(x+1)} = \frac{(2x+3)(x+1)}{2(x-1)(x+1)} - \frac{5(2)}{2(x+1)(x-1)} - \frac{(2x-3)(x-1)}{2(x+1)(x-1)}$

$$= \frac{2x^2+2x+3x+3}{2(x-1)(x+1)} - \frac{10}{2(x-1)(x+1)} - \frac{2x^2-2x-3x+3}{2(x-1)(x+1)} = \frac{2x^2+5x+3-10-(2x^2-5x+3)}{2(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{\cancel{2x^2} + 5x - 7 - \cancel{2x^2} + 5x - 3}{2(x-1)(x+1)} = \frac{10x-10}{2(x-1)(x+1)} = \frac{10(\cancel{x-1})}{2(\cancel{x-1})(x+1)} \stackrel{x \neq 1}{=} \frac{5}{x+1}$$

صفحه ۲۴ کتاب درسی

تمرین

۱) عبارت های گویای زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده اند؟

در هر عبارت با برابر صفر قرار دادن مخرج، مقادیری را که به ازای آنها عبارت تعریف نشده می شود، می یابیم.

عبارت به ازای $x = \pm 1$ تعریف نشده است. $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

ب) عبارت به ازای تمام مقادیر x تعریف شده است. $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4$ غیرممکن



عبارت به ازای $x=0$ و $x=1$ تعریف نشده است. $\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$ $\Rightarrow \frac{5}{x^2+x} : x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0$ (پ)

$\frac{x^3+3x^2+2x}{x(x+1)(x^2-4)} : x(x+1)(x^2-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$ (ت)

عبارت به ازای $x=0$ ، $x=-1$ و $x=\pm 2$ تعریف نشده است. $\Rightarrow$

عبارت به ازای $x=0$ تعریف شده است. $x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \frac{3x^2y+6xy^2}{x^2} : x^2=0$ (ث)

عبارت به ازای $a=0$ و $a=25$ تعریف نشده است. $\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=25 \end{cases} \Rightarrow \frac{42a^3-30a^3}{a^2-25a} : a^2-25a=0 \Rightarrow a(a-25)=0$ (ج)

۲) حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

ریاضی

فصل ۱

الف) $\frac{4}{9x} - \frac{5x}{6y^2} + 1 = \frac{4}{9x} - \frac{5x}{6y^2} + \frac{1}{1} \Rightarrow$ مخرج مشترک $= 18xy^2$

$$\Rightarrow \frac{4}{9x} - \frac{5x}{6y^2} + 1 = \frac{4 \times 2y^2}{18xy^2} - \frac{5x(3x)}{18xy^2} + \frac{18xy^2}{18xy^2} = \frac{8y^2 - 15x^2 + 18xy^2}{18xy^2}$$

ب) $\frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{1} \Rightarrow$ مخرج مشترک $= x-1$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x-1} = \frac{(x+1)-(x-1)}{x-1} = \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+1}{x-1} = \frac{2}{x-1}$$

پ) $\frac{\frac{1}{m}+1}{\frac{m}{m+1}} = \frac{\frac{1}{m}+1}{\frac{m}{m+1}} = \frac{\frac{1}{m}+\frac{m}{m}}{\frac{m}{m+1}} = \frac{\frac{1+m}{m}}{\frac{m}{m+1}} \xrightarrow[\text{نزدیک در نزدیک}]{\text{دور در دور}} \frac{(1+m)(1)}{m(m+1)} = \frac{\cancel{m}+1}{m(\cancel{m}+1)} \xrightarrow{m=-1} \frac{1}{m}$

ت) $\frac{2x}{x^2-y^2} + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}$

$$\left. \begin{array}{l} x^2-y^2 = (x-y)(x+y) \\ x+y \\ x-y \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مخرج مشترک} = (x-y)(x+y)$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{x^2-y^2} + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} = \frac{2x}{(x-y)(x+y)} + \frac{(x-y)}{(x-y)(x+y)} - \frac{(x+y)}{(x-y)(x+y)}$$

$$= \frac{2x+x-y-(x+y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{2x-2y}{(x-y)(x+y)} = \frac{2(\cancel{x}-y)}{(\cancel{x}-y)(x+y)} \xrightarrow{x \neq y} \frac{2}{x+y}$$



ث) $\frac{x+3}{x^2-6x+9} - \frac{x+2}{x^2-9} - \frac{5}{3-x}$

$$\left. \begin{aligned} x^2-6x+9 &= (x-3)^2 \\ x^2-9 &= (x-3)(x+3) \\ 3-x &= -(x-3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مخرج مشترک} = (x-3)^2(x+3)$$

$$\frac{x+3}{x^2-6x+9} - \frac{x+2}{x^2-9} - \frac{5}{3-x} = \frac{(x+3)(x+3)}{(x-3)^2(x+3)} - \frac{(x+2)(x-3)}{(x-3)^2(x+3)} + \frac{5(x-3)(x+3)}{(x-3)^2(x+3)}$$

$$= \frac{(x+3)^2 - (x^2-3x+2x-6) + 5(x^2-9)}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{\cancel{x^2} + 6x + 9 - \cancel{x^2} + x + 6 + 5x^2 - 45}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{5x^2 + 7x - 30}{(x-3)^2(x+3)}$$

ج) $\frac{y-3}{y^2-4} - \frac{y+2}{y^2-4y+4} - \frac{2}{2-y}$

$$\left. \begin{aligned} y^2-4 &= (y-2)(y+2) \\ y^2-4y+4 &= (y-2)^2 \\ 2-y &= -(y-2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مخرج مشترک} = (y-2)^2(y+2)$$

$$\frac{y-3}{y^2-4} - \frac{y+2}{y^2-4y+4} - \frac{2}{2-y} = \frac{(y-3)(y-2)}{(y-2)^2(y+2)} - \frac{(y+2)(y+2)}{(y-2)^2(y+2)} + \frac{2(y-2)(y+2)}{(y-2)^2(y+2)}$$

$$= \frac{(y^2-3y-2y+6) - (y^2+4y+4) + 2(y^2-4)}{(y-2)^2(y+2)} = \frac{\cancel{y^2} - 5y + 6 - \cancel{y^2} - 4y - 4 + 2y^2 - 8}{(y-2)^2(y+2)} = \frac{2y^2 - 9y - 6}{(y-2)^2(y+2)}$$