

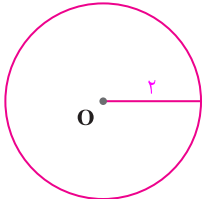


فعالیت

صفحه ۱۰ و ۱۱ کتاب درسی

(برای مراحل زیر از خط‌کش و پرگار استفاده کنید.)

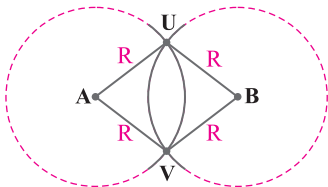
۱) نقطه‌ای مانند O را در صفحه در نظر بگیرید و نقاطی را مشخص کنید که فاصله یکسانی از نقطه O دارند. (مثلاً همه نقاطی که فاصله‌شان از نقطه O برابر ۲ سانتی‌متر است). سوزن پرگار را در نقطه O گذاشته، دهانه پرگار را به اندازه داده شده (۲ سانتی‌متر) باز کرده و دایره‌ای رسم می‌کنیم. همه نقاطی که روی این دایره قرار دارند از نقطه O به یک فاصله هستند و هر نقطه‌ای که از نقطه O به فاصله داده شده (۲ سانتی‌متر) باشد، روی این دایره قرار دارد.



۲) خط d را در نظر بگیرید و تمام نقاطی که به فاصله ۲ سانتی‌متر از خط d قرار دارند را مشخص کنید. همان‌طور که در شکل می‌بینیم، نقاطی که از خط d به فاصله ۲ سانتی‌متر قرار دارند دو خط به موازات d تشکیل می‌دهند.

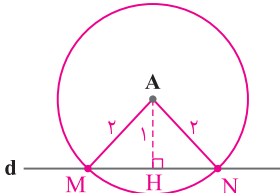


۳) نقاط A و B را در نظر بگیرید. دهانه پرگار از نصف طول پاره خط AB باز کنید و یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B و با همان شعاع قبلی کمان بزنید تا یکدیگر را در نقاط U و V قطع کنند. U و V چه ویژگی مشترکی دارند؟



نقاط U و V از دو نقطه A و B به یک فاصله‌اند که این فاصله همان شعاع دایره‌هایی است که رسم کرده‌ایم:
 $UA = UB = VA = VB = R$

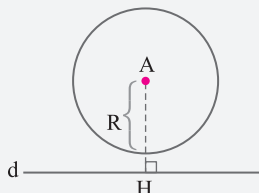
۴) نقطه A، مانند شکل مقابل به فاصله ۱ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصله ۲ سانتی‌متر از نقطه A باشند.



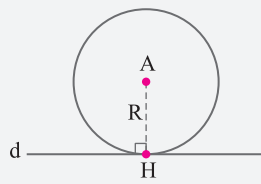
کلیه نقاطی که از نقطه A به فاصله ۲ سانتی‌متر باشند، روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۲ قرار دارند. پس باید نقاطی را بیابیم که هم روی دایره و هم روی خط d باشند. دو نقطه M و N که از برخورد دایره و خط d ایجاد شده‌اند جواب‌های مسئله‌اند.

تفکری

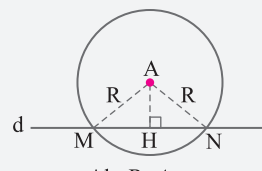
- ۱- اگر فاصله نقطه A تا خط d از اندازه شعاع دایره کوچک‌تر باشد، خط d و دایره دقیقاً در دو نقطه متقاطع‌اند و مسئله دو جواب دارد.
- ۲- اگر فاصله نقطه A تا خط d با شعاع دایره برابر باشد، مسئله یک جواب دارد.
- ۳- در صورتی که فاصله نقطه A تا خط d بزرگ‌تر از شعاع دایره باشد، مسئله فاقد جواب است.



(فاقد جواب $AH > R$)



(یک جواب $AH = R$)



(دو جواب $AH < R$)

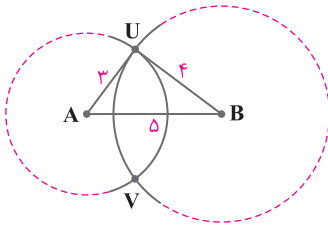


۵) نقاط A و B را به فاصله ۵ سانتی‌متر از هم در نظر بگیرید. دهانه پرگار را به اندازه ۳ سانتی‌متر باز کنید و از نقطه A یک کمان بزنید. سپس دهانه پرگار را به اندازه ۴ سانتی‌متر باز کنید و از نقطه B یک کمان بزنید.

الف) نقاط روی کمان اول چه ویژگی مشترکی دارند؟ همگی از نقطه A به فاصله ۳ سانتی‌متر قرار دارند.

ب) نقاط روی کمان دوم چه ویژگی مشترکی دارند؟ همگی از نقطه B به فاصله ۴ سانتی‌متر قرار دارند.

پ) نقاط تقاطع دو کمان فاصله‌شان از نقاط A و B چگونه است؟ برای اینکه چنین نقاط تقاطعی وجود داشته باشند، اندازه شعاع آنها و فاصله نقاط A و B چه شرطی باید داشته باشند؟



نقاط تقاطع دو کمان (یعنی U و V) از نقطه A به فاصله ۳ سانتی‌متر و از نقطه B به فاصله ۴ سانتی‌متر قرار دارند. برای اینکه چنین نقاطی وجود داشته باشند (یعنی دو دایره متقاطع باشند) باید مجموع شعاع‌های دو دایره بیشتر از فاصله بین A و B باشد.

ت) طول اضلاع مثلث AUB چقدر است؟

$$UA = 3\text{cm}, UB = 4\text{cm}, AB = 5\text{cm}$$

(در سؤال ۵ روشی برای رسم مثلث با داشتن طول سه ضلع آن یافتیم.)

صفحه ۱۱ کتاب درسی

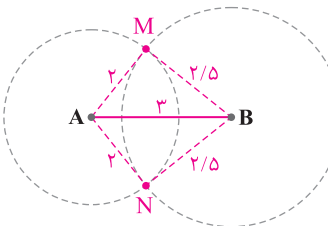
کار در کلاس

۱) دو نقطه مانند A و B را به فاصله ۳ سانتی‌متر از هم در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله‌شان از A، ۲ و از B، ۲/۵ سانتی‌متر باشد.

همه نقاطی که از نقطه A به فاصله ۲ سانتی‌متر باشند، روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۲ سانتی‌متر قرار دارند. همچنین همه نقاطی که از نقطه B به فاصله ۲/۵

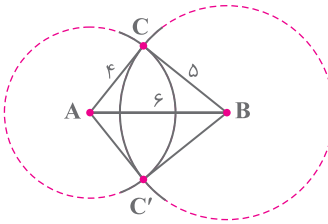
سانتی‌متر باشند، روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۲/۵ سانتی‌متر قرار دارند. پس جواب مسئله، محل برخورد این دو دایره است. از آنجا که مجموع شعاع‌های دو

دایره (یعنی ۴/۵) از فاصله A و B (یعنی ۳) بزرگ‌تر است، دایره‌ها در دو نقطه M و N متقاطع‌اند و مسئله دو جواب دارد. $MA = 2\text{cm}$, $MB = 2/5\text{cm}$ و $NA = 2\text{cm}$, $NB = 2/5\text{cm}$



۲) توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلثی به طول اضلاع ۴ و ۵ و ۶ واحد رسم کرد.

ابتدا پاره خطی به طول ۶ واحد رسم می‌کنیم؛ سپس به مرکز A دایره‌ای به شعاع ۴ واحد و همچنین دایره دیگری به مرکز B و شعاع ۵ واحد رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو دایره، رأس سوم مثلث است.



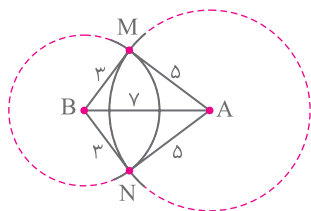
۱- از آنجا که در این سؤال، مجموع طول هر دو ضلع، از ضلع سوم بیشتر است دایره‌ها همواره متقاطع‌اند و مسئله جواب دارد. توجه کنید که مثلث ABC' با مثلث ABC هم‌نهشت است و آن را جواب جدیدی برای مسئله فرض نمی‌کنیم و می‌گوییم مسئله یک جواب دارد.

۲- اگر مجموع هر دو ضلع مثلث از ضلع سوم بزرگ‌تر نباشد، چنین مثلثی وجود ندارد.



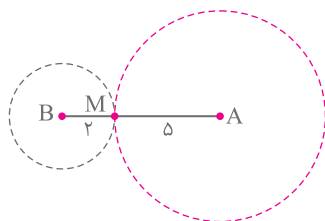
۳) نقاط A و B به فاصله ۷ سانتی‌متر از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه A برابر و از نقطه B برابر باشد. جاهای خالی را به گونه‌ای کامل کنید که مسئله زیر:

الف) دو جواب داشته باشد.



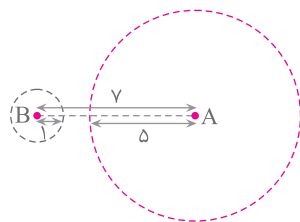
نقاط A و B به فاصله ۷ سانتی‌متر از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه A برابر ۵ cm و از نقطه B برابر ۳ cm باشد. دو دایره به مرکزهای A و B و به شعاع‌های ۵ و ۳ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. از آنجا که $5 + 3 > 7$ ، این دو دایره در دو نقطه متقاطع‌اند (M و N) و مسئله دو جواب دارد.

ب) یک جواب داشته باشد.



نقاط A و B به فاصله ۷ سانتی‌متر از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه A برابر ۵ cm و از نقطه B برابر ۲ cm باشد. دو دایره به مرکزهای A و B و به شعاع‌های ۵ و ۲ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. از آنجا که $5 + 2 = 7$ ، این دو دایره مماس‌اند و مسئله یک جواب دارد (نقطه M).

پ) جواب نداشته باشد.



نقاط A و B به فاصله ۷ سانتی‌متر از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه A برابر ۵ cm و از نقطه B برابر ۱ cm باشد. دو دایره به مرکزهای A و B و به شعاع‌های ۵ و ۱ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. از آنجا که $5 + 1 < 7$ ، این دو دایره یکدیگر را قطع نمی‌کنند و مسئله جواب ندارد.

هندسه

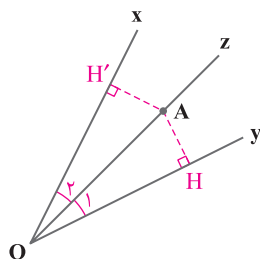
فصل ۱

نتیجه

برای هر قسمت از این سؤال می‌توان بی‌شمار جواب یافت و عددهای ارائه‌شده فقط یک نمونه از جواب‌ها هستند.

فعالیت

صفحه ۱۱ و ۱۲ کتاب درسی



۱) زاویه xOy و نیم‌خط Oz را نیمساز آن در نظر بگیرید. فرض کنید نقطه A نقطه‌ای دلخواه روی Oz باشد. ثابت کنید که فاصله نقطه A از دو ضلع زاویه xOy یکسان است. (یعنی اگر از نقطه A عمودهایی بر نیم‌خط‌های Ox و Oy رسم کنیم، طول آنها با هم برابر است.)

از نقطه A دو عمود بر اضلاع زاویه O رسم کرده و پای آنها را H و H' می‌نامیم.

بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{O_1} = \widehat{O_2} : \text{Oz نیمساز } \widehat{O} \\ OA = OA : \text{ضلع مشترک} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAH \cong \triangle OAH' \Rightarrow AH = AH'$$

(وتر و یک زاویه حاده)

یعنی نقطه A از دو ضلع زاویه O به یک فاصله است.

نتیجه

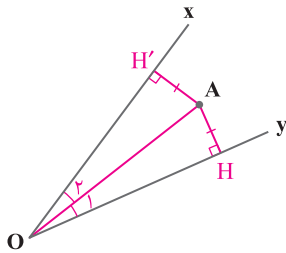
۱- اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.



۲ زاویه xOy و نقطه A را چنان در نظر می‌گیریم که فاصله نقطه A از نیم‌خط‌های Ox و Oy با هم برابر باشد.

نشان دهید که نقطه A روی نیمساز زاویه xOy قرار دارد.

(راهنمایی: پاره‌خط OA ، و دو عمود از نقطه A بر خطوط Ox و Oy رسم کنید و نشان دهید پاره‌خط OA همان نیمساز xOy است.)



از نقطه A دو عمود AH و AH' را بر اضلاع زاویه رسم کرده و نقطه A به O وصل می‌کنیم. از آنجا که نقطه A از دو ضلع زاویه به یک فاصله است داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AH = AH' \text{ : فرض مسئله} \\ OA = OA \text{ : ضلع مشترک} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAH \cong \triangle OA'H' \Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \text{ (وتر یک ضلع)}$$

یعنی OA نیمساز زاویه xOy است.



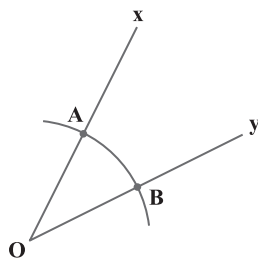
۲- اگر نقطه‌ای به فاصله یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.



از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

صفحه ۱۲ کتاب درسی

فعالیت



۱ زاویه xOy را در نظر بگیرید. دهانه پُرگار را کمی باز کنید و به مرکز O کمانی بزنید تا

نیم‌خط‌های Ox و Oy را به ترتیب در نقاط A و B قطع کند.

- طول پاره‌خط‌های OA و OB نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

OA و OB با هم برابرند؛ زیرا شعاع‌های یک دایره‌اند.

۲ دهانه پُرگار را کمی باز کنید (بیش از نصف طول AB) و یک‌بار به مرکز A و بار دیگر با

همان اندازه و به مرکز B یک کمان بزنید تا دو کمان مانند شکل در نقطه‌ای مانند W همدگر

را قطع کنند.

- طول پاره‌خط‌های AW و BW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

AW و BW با هم برابرند؛ زیرا هر دو کمان را به یک شعاع رسم کرده‌ایم.

- پاره‌خط‌های WA و WB و WO را رسم کنید. دو مثلث OAW و OBW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

دو مثلث OAW و OBW هم‌نهشت‌اند؛ زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \\ OW = OW \text{ : ضلع مشترک} \\ AW = BW \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAW \cong \triangle OBW \text{ (ض ض ض)}$$

- اندازه زاویه‌های AOW و BOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

چون دو مثلث OAW و OBW هم‌نهشت‌اند، اجزای متناظر آنها با هم برابرند؛ پس $\widehat{AOW} = \widehat{BOW}$.

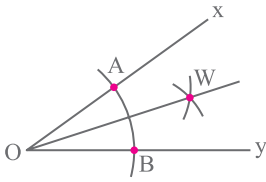
- پاره‌خط OW برای زاویه xOy چه نوع پاره‌خطی است؟

پاره‌خط OW نیمساز xOy است؛ زیرا آن را به دو زاویه مساوی $\widehat{AOW}$ و $\widehat{BOW}$ تقسیم کرده است.



کار در کلاس

صفحه ۱۲ کتاب درسی

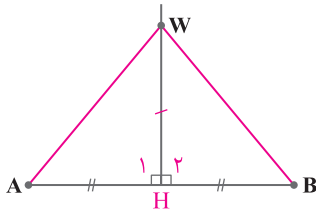


روش رسم نیمساز یک زاویه را توضیح دهید. زاویه xOy مفروض است. کمائی دلخواه به مرکز O رسم می‌کنیم تا اضلاع زاویه را در نقطه‌های A و B قطع کند. سپس دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ای بیشتر از نصف فاصله A تا B باز کرده و به مرکزهای A و B دو کمان می‌زنیم تا یکدیگر را در W قطع کنند. OW نیمساز xOy است.

فعالیت

صفحه ۱۳ کتاب درسی

۱) پاره خط AB و عمودمنصف آن را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید و فرض کنید W نقطه‌ای روی عمودمنصف AB باشد. نشان دهید نقطه W از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است.



W را به دو سر پاره خط وصل می‌کنیم. در دو مثلث WAH و WBH داریم:

$$\left. \begin{array}{l} WH = WH : \text{ضلع مشترک} \\ \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 = 90^\circ \\ AH = HB : \text{فرض مسئله} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AWH \cong \triangle BWH \Rightarrow AW = BW \quad (\text{ض. ض. ض.})$$

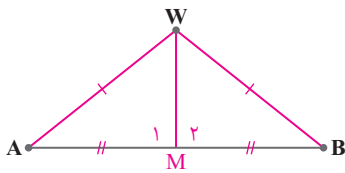
پس نقطه W از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است.

نتیجه

۱- اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره خط قرار داشته باشد، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.

هندسه

فصل ۱



۲) پاره خط AB و نقطه W را به گونه‌ای در نظر بگیرید که نقطه W از A و B به یک فاصله باشد (یعنی $WA = WB$) نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد. (راهنمایی: از نقطه W به A و B و به وسط پاره خط AB وصل کنید و نشان دهید مثلث‌های ایجاد شده با هم هم‌نهشت هستند و از این مطلب استفاده کنید و نشان دهید W روی عمودمنصف پاره خط AB قرار دارد.) نقطه W را به نقطه M وسط

AB وصل می‌کنیم، در دو مثلث WAM و WBM داریم:

$$\left. \begin{array}{l} WA = WB : \text{فرض مسئله} \\ WM = WM : \text{ضلع مشترک} \\ AM = MB : \text{فرض مسئله} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle WAM \cong \triangle WMB \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \quad (*)$$

$$\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 180^\circ \xrightarrow{(*)} \widehat{M}_1 + \widehat{M}_1 = 180^\circ \Rightarrow 2\widehat{M}_1 = 180^\circ \Rightarrow \widehat{M}_1 = 90^\circ$$

پس WM بر AB عمود است و آن را نصف کرده است؛ در نتیجه WM عمودمنصف AB است.

نتیجه

۲- اگر نقطه‌ای از دوسر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.

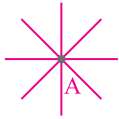
نتیجه

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره خط باشد از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است. و هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.

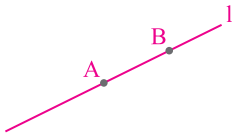


فعالیت

صفحه ۱۳ کتاب درسی



۱ یک نقطه را در صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از نقطه مورد نظر بگذرد؟ مطابق شکل، از نقطه دلخواه A بی‌شمار خط می‌گذرد.

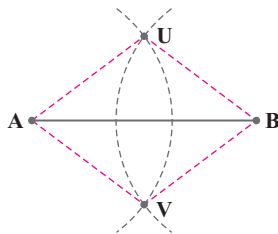


۲ دو نقطه را در یک صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن دو نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطه مورد نظر بگذرد؟ مطابق شکل، از دو نقطه متمایز A و B یک و فقط یک خط می‌گذرد.

۳ به نظر شما برای اینکه یک خط به طور کامل مشخص باشد، حداقل چند نقطه از آن خط را باید داشته باشیم؟ دو نقطه

فعالیت

صفحه ۱۴ کتاب درسی



پاره خط AB را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید.

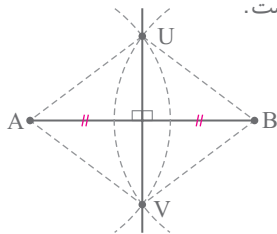
۱ دهانه پرگار را بیشتر از نصف طول AB باز کنید و یک بار از نقطه A و بار دیگر با همان اندازه از نقطه B کمان بزنید تا یکدیگر را در دو نقطه مانند U و V قطع کنند.

۲ طول پاره خط‌های AU و BU نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

پاره خط‌های AU و BU با هم برابرند؛ زیرا اندازه دهانه پرگار برای رسم کمان‌ها تغییر نکرده است.

۳ طول پاره خط‌های AV و BV نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

پاره خط‌های AV و BV نیز با هم برابرند؛ زیرا اندازه دهانه پرگار برای رسم کمان‌ها تغییر نکرده است.



۴ آیا می‌توان گفت نقاط U و V روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارند؟ چرا؟

بله؛ زیرا هر دو نقطه U و V از دو سر پاره خط AB به یک فاصله‌اند.

۵ عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید.

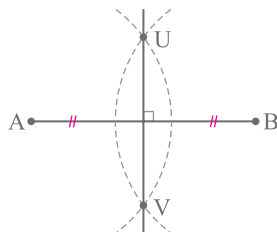
نقاط U و V را به هم وصل می‌کنیم تا عمود منصف پاره خط AB به دست آید.

کار در کلاس

صفحه ۱۴ کتاب درسی

مراحل رسم عمود منصف یک پاره خط را توضیح دهید.

پاره خط AB مفروض است. دهانه پرگار را بیشتر از نصف AB باز کرده و به مرکزهای A و B دو کمان می‌زنیم تا یکدیگر را در نقاط U و V قطع کنند. خط گذرنده از U و V، عمود منصف پاره خط AB است.



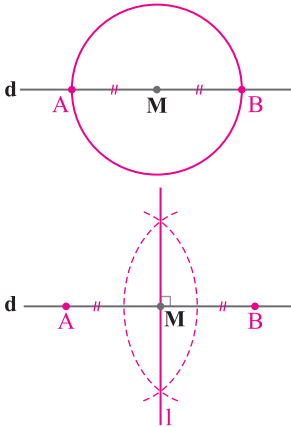


فعالیت

صفحه ۱۴ کتاب درسی

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن

خط d و نقطه M را روی آن، مانند شکل مقابل در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی بکشیم که از M بگذرد و بر d عمود باشد.



۱ به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d بیابید؛ به گونه‌ای که M وسط پاره خط AB باشد.

به مرکز M و شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. از آنجا که MA و MB شعاع‌های دایره‌اند، با هم برابرند و نقطه M وسط AB است.

۲ عمودمنصف پاره خط AB را رسم کنید.

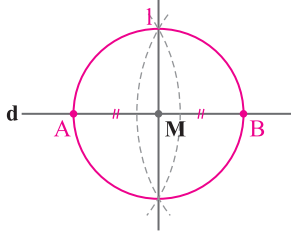
به کمک روشی که در کاردر کلاس قبل آموختیم، خط l عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم.

۳ عمودمنصف پاره خط AB خطی است که بر خط d عمود است. و از نقطه M می‌گذرد.

کار در کلاس

صفحه ۱۴ کتاب درسی

مراحل رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن را توضیح دهید.



خط d و نقطه M روی آن مفروض است. به مرکز M و شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. خط l عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم. خط l بر خط d عمود است و از نقطه M می‌گذرد.

هندسه

فصل ۱

فعالیت

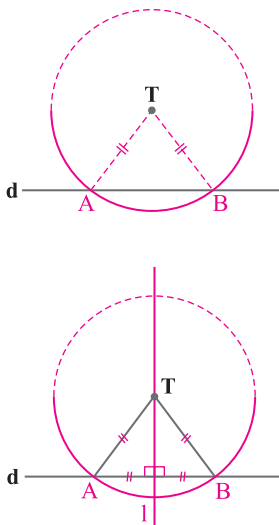
صفحه ۱۵ کتاب درسی

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیرواقع بر آن

خط d و نقطه T را که غیر واقع بر آن است، مانند شکل مقابل در نظر بگیرید.

می‌خواهیم خطی بکشیم که از T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۱ به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d به گونه‌ای بیابید که از نقطه T به یک فاصله باشند.



به مرکز T و به شعاعی بزرگ‌تر از فاصله T تا خط d دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. دو نقطه A و B از نقطه T به یک فاصله‌اند ($TA = TB$) زیرا شعاع‌های دایره‌اند.

۲ عمودمنصف پاره خط AB را رسم کنید.

به روشی که قبلاً آموختیم، خط l (عمودمنصف AB) را رسم می‌کنیم.

۳ آیا عمودمنصف پاره خط AB از نقطه T می‌گذرد؟ چرا؟

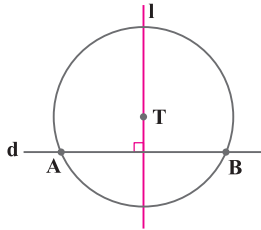
بله؛ زیرا نقطه T از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است.

عمودمنصف پاره خط AB خطی است که بر خط d عمود است. و از نقطه T می‌گذرد.



کار در کلاس

صفحه ۱۵ کتاب درسی



روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای غیر واقع بر آن را توضیح دهید. نقطه T خارج خط d مفروض است. به مرکز T و شعاعی بیشتر از فاصله T تا خط d، دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در A و B قطع کند. خط l عمود منصف AB را رسم می‌کنیم. در این صورت، خط l از نقطه T می‌گذرد و بر خط d عمود است.

فعالیت

صفحه ۱۵ کتاب درسی

رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطه غیر واقع بر آن خط d و نقطه T مانند شکل مقابل داده شده‌اند.

می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه T بگذرد و با خط d موازی باشد.

۱ خط d_1 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

به روشی که در کار در کلاس قبل آموختیم، خط d_1 را رسم می‌کنیم.

۲ خط d_2 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه T بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.

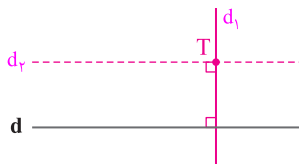
به روشی که در فعالیت قبل آموختیم، خط d_2 را رسم می‌کنیم.

۳ خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را موازی در نظر بگیرید.)

خط d_2 با خط d موازی است؛ زیرا هر دو خط d و d_2 بر خط d_1 عمودند و می‌دانیم دو خط عمود بر یک خط، با هم موازی‌اند.

کار در کلاس

صفحه ۱۵ کتاب درسی



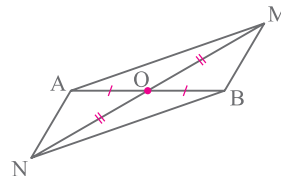
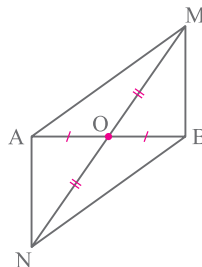
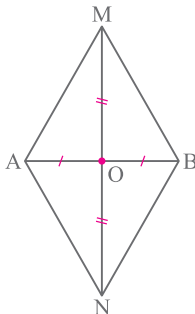
روش رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای غیر واقع بر آن را توضیح دهید.

نقطه T خارج خط d مفروض است. از نقطه T خط d_1 را بر خط d عمود رسم می‌کنیم؛ سپس از نقطه T خط d_2 را بر خط d_1 عمود می‌کنیم. از آنجا که دو خط d و d_2 بر خط d_1 عمودند، با هم موازی‌اند. پس خط d_2 از نقطه T می‌گذرد و با خط d موازی است.

تمرین

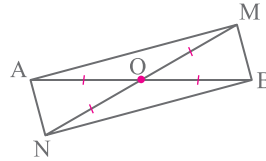
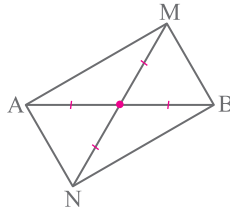
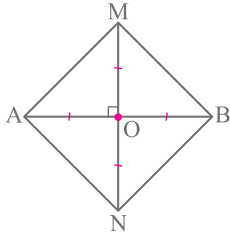
صفحه ۱۵ و ۱۶ کتاب درسی

۱ فرض کنیم هر چهار ضلعی که قطرهاش متناصف هم باشند، متوازی‌الاضلاع است. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟ ابتدا پاره خط AB به طول ۴ را رسم کرده و وسط آن را O می‌نامیم. حال پاره خط MN به طول ۷ را از نقطه O چنان رسم می‌کنیم که نقطه O وسط آن باشد. چهارضلعی AMBN متوازی‌الاضلاع مورد نظر است. از آنجا که زاویه بین دو قطر یا اطلاعات دیگری از این متوازی‌الاضلاع داده نشده است، این مسئله بی‌شمار جواب دارد (مانند شکل‌های زیر).





۲) فرض کنیم هر چهارضلعی که قطرهاش با هم برابر و منصف هم باشند، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی‌متر باشد. ابتدا پاره خط AB به طول ۶ را رسم کرده و وسط آن را O می‌نامیم. سپس پاره خط MN به طول ۶ را چنان رسم می‌کنیم که نقطه O وسط آن باشد. طبق فرض، چهارضلعی $AMBN$ مستطیلی به قطر ۶ است. از آنجا که زاویه بین قطرهای یا اطلاعات دیگری از این مستطیل داده نشده است، این مسئله بی‌شمار جواب دارد (مانند شکل‌های زیر).



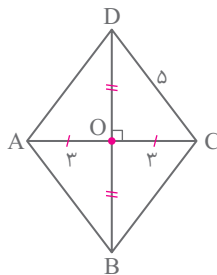
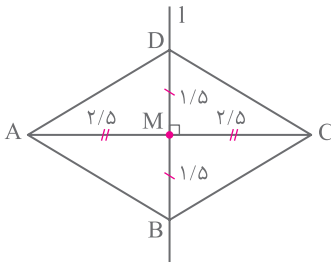
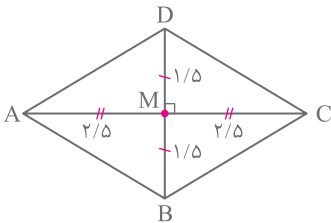
۳) فرض کنیم که برای لوزی بودن یک چهارضلعی کافی است که قطرهای آن چهارضلعی عمودمنصف یکدیگر باشند. ترسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشد.

ابتدا فرض می‌کنیم مسئله حل شده است و شکل آن را رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل، روش رسم به صورت زیر است:

ابتدا پاره خط AC به طول ۵ سانتی‌متر و سپس خط l عمودمنصف AC را رسم می‌کنیم و وسط AC را M می‌نامیم. حال روی خط l ، دو پاره خط MD و MB را به طول $1/5$ سانتی‌متر در طرفین نقطه M جدا می‌کنیم. قطرهای چهارضلعی $ABCD$ عمودمنصف یکدیگرند؛ پس این چهارضلعی، یک لوزی به قطرهای ۳ و ۵ است.

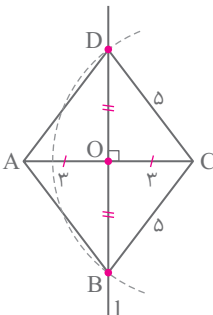


ب) یک لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۶ رسم کنید.

ابتدا فرض می‌کنیم مسئله حل شده است و شکل آن را رسم می‌کنیم.

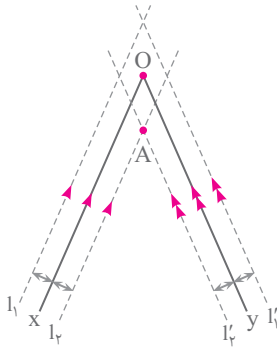
با توجه به شکل، روش رسم به صورت زیر است:

ابتدا پاره خط AC به طول ۶ واحد و خط l عمودمنصف AC را رسم می‌کنیم. حال، به مرکز C و شعاع ۵ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط l را در B و D قطع کند. از آنجا که قطرهای این چهارضلعی عمودمنصف یکدیگرند، این چهارضلعی یک لوزی به ضلع ۵ و طول قطر ۶ است.





۴ دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.

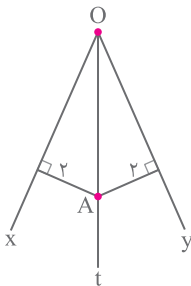


الف) نقطه‌ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه مورد نظر ۲ واحد باشد.

نقاطی که از Ox به فاصله ۲ واحد باشند، روی دو خط l_1 و l_2 به موازات Ox و به فاصله ۲ واحد از آن قرار دارند. به همین ترتیب، نقاطی که از Oy به فاصله ۲ واحد باشند روی دو خط l'_1 و l'_2 به موازات Oy و به فاصله ۲ واحد از آن قرار دارند. پس نقاط مورد نظر، محل برخورد خط‌های l_1 و l'_1 با l_2 و l'_2 هستند. مطابق شکل، این خطوط در چهار نقطه متقاطع‌اند؛ اما از آنجا که فاصله نقطه مورد نظر از اضلاع زاویه (و نه از امتداد اضلاع) باید ۲ واحد باشد؛ فقط نقطه A را انتخاب می‌کنیم (توجه داشته باشید که نقطه A از اضلاع زاویه به یک فاصله است؛ یعنی روی نیمساز آن قرار دارد).

ب) با استفاده از نقطه‌ای که در قسمت الف) یافته‌اید نیمساز زاویه را رسم کنید.

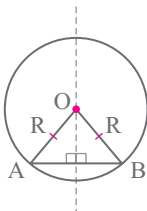
فرض کنیم نقطه A از دو ضلع زاویه به فاصله ۲ قرار دارد پس نقطه A از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و در نتیجه روی نیمساز زاویه قرار دارد. حال کافی است نقطه O (رأس زاویه) را به نقطه A وصل کنیم تا نیمساز به دست آید.



۵ به قسمت الف) پاسخ دهید و از نتیجه آن در قسمت ب) استفاده کنید.

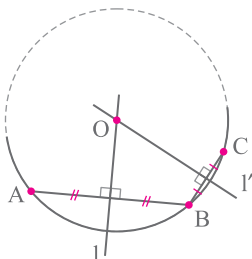
الف) وتر AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمودمنصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

مرکز دایره روی عمودمنصف وتر AB قرار دارد؛ زیرا از دو سر آن به یک فاصله است.
($OA = OB = R$)



ب) آیا می‌دانستید که در زمین فوتبال نقطه پنالتی مرکز دایره‌ای است که قسمتی از قوس آن در جلوی محوطه جریمه کشیده شده است؟ یک داور فوتبال لحظه‌ای که اعلام پنالتی می‌کند، متوجه می‌شود که نقطه پنالتی مشخص نیست. اگر او وسایل لازم برای کشیدن خط راست و کمان دایره را داشته باشد، چگونه می‌تواند با استفاده از قوس جلوی محوطه هجده قدم، نقطه پنالتی را مشخص کند.

به طور خلاصه می‌توان گفت هدف از این مسئله، یافتن مرکز یک دایره داده شده است. برای حل این مسئله، چندین روش موجود است که یکی از آنها را مطرح می‌کنیم: سه نقطه دلخواه A ، B و C را روی کمان داده شده انتخاب کرده و پاره خط‌های AB و BC را تشکیل می‌دهیم. حال دو خط l و l' عمودمنصف‌های AB و BC را رسم می‌کنیم تا در O یکدیگر را قطع کنند. نقطه O مرکز دایره است زیرا از آنجا که عمودمنصف هر وتر، از مرکز دایره می‌گذرد؛ تنها نقطه مشترک بین l و l' مرکز دایره است.





درس دوم: استدلال

فہائیت

صفحة ۱۸ کتاب درسی

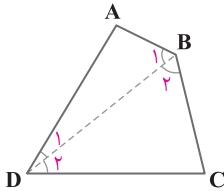
به استدلال‌هایی که دو دانش‌آموز برای مسئله زیر ارائه داده‌اند، دقت کنید و در مورد میزان اعتبار هر یک از آنها گفت‌وگو کنید.

مسئله: مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.

پژمان: در تمام چهارضلعی‌های مربع، مستطیل، لوزی و متوازی‌الاضلاع با توجه به اینکه زاویه‌های مجاور مکمل یکدیگرند به سادگی ثابت می‌شود که مجموع زوایای داخلی آنها 360° است. بنابراین مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.

پیمان: می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است. یک چهارضلعی دلخواه مانند ABCD در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم و دو رأس مقابل آن، مثلاً D و B را به هم وصل می‌کنیم. مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD با مجموع زاویه‌های داخلی دو مثلث ABD و BCD برابر است؛ بنابراین مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD برابر است با 360° .

پیمان ادعا می‌کند که با این استدلال ثابت می‌شود که مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی برابر 360° است. آیا به نظر شما این ادعای او درست است؟ استدلال پیمان به این صورت است:



$$\begin{aligned} \triangle ABD \text{ مجموع زاویه‌های داخلی } &= 180^\circ & \triangle BCD \text{ مجموع زاویه‌های داخلی } &= 180^\circ \\ \Rightarrow (\text{مجموع زاویه‌های داخلی } \triangle ABD) + (\text{مجموع زاویه‌های داخلی } \triangle BCD) &= 360^\circ \\ \Rightarrow (\hat{A} + \hat{B}_1 + \hat{D}_1) + (\hat{C} + \hat{B}_2 + \hat{D}_2) &= 360^\circ \\ \Rightarrow \hat{A} + (\hat{B}_1 + \hat{B}_2) + \hat{C} + (\hat{D}_1 + \hat{D}_2) &= 360^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \end{aligned}$$

پس مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD برابر 360° است. از آنجا که در این استدلال هیچ شرط خاصی برای چهارضلعی ABCD مطرح نشده، این استدلال برای تمام چهارضلعی‌ها صحیح است.

آیا همین استدلال را برای هر چهارضلعی دیگری که به شما بدهند، می‌توانید به کار ببرید؟ بله. اگر جواب شما مثبت است پس این ویژگی را که «مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD در مسئله قبل برابر 360° است»، به سایر چهارضلعی‌های محدب می‌توان تعمیم داد.

- نوع استدلال ارائه شده توسط هر کدام از دانش‌آموزان را بیان کنید.

استدلال پژمان از نوع استقرایی و استدلال پیمان از نوع استنتاجی است.

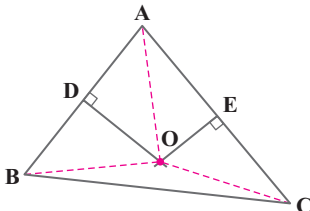
مثال

صفحة ۱۸ و ۱۹ کتاب درسی

می‌دانیم که هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده، نتیجه بگیرید که سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث همرس‌اند (در یک نقطه به هم می‌رسند).

استدلال: مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. چون پاره‌خط‌های AB و AC متقاطع‌اند، عمودمنصف‌های آنها نیز در نقطه‌ای مانند O متقاطع‌اند.



① نقطه O روی عمودمنصف پاره‌خط AC است؛ بنابراین $OA \equiv OC$.

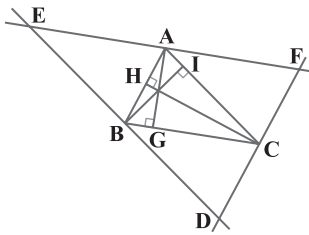
② نقطه O روی عمودمنصف پاره‌خط AB است؛ بنابراین $OA \equiv OB$.

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $OB \equiv OC$ ؛ بنابراین نقطه O روی عمودمنصف BC قرار دارد. در نتیجه نقطه O محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث است.



مثال

صفحه ۱۹ و کتاب درسی



استدلال استنتاجی زیرا کامل کنید و نتیجه بگیرید که سه ارتفاع هر مثلث هم‌رس‌اند.

استدلال: مثلث دلخواه ABC را در نظر بگیرید و از هر رأس آن خطی به موازات ضلع

مقابل به آن رأس رسم کنید تا مطابق شکل مقابل مثلثی مانند DEF به وجود آید.

مثلث ABC با مثلث‌های ACF و ABE هم‌نهشت است (چرا؟).

$$\left. \begin{array}{l} AF \parallel BC \\ AB \parallel FC \end{array} \right\} \Rightarrow \text{متوازی الاضلاع AFBC} \Rightarrow AF = BC$$

$$\left. \begin{array}{l} EA \parallel BC \\ EB \parallel AC \end{array} \right\} \Rightarrow \text{متوازی الاضلاع AEBC} \Rightarrow AE = BC$$

$$\Rightarrow AE = BC = AF$$

(دقت کنید که از سال گذشته می‌دانیم در متوازی الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو برابرند و نیازی به اثبات هم‌نهشتی مثلث‌های ABC،

ACF و ABE نیست.)

بنابراین $AE = BC = AF$ و لذا نقطه A وسط پاره EF است.

$$\left. \begin{array}{l} AG \perp BC \\ BC \parallel EF \end{array} \right\} \Rightarrow AG \perp EF$$

لذا خط AG عمود منصف پاره EF است.

به طور مشابه می‌توان نشان داد: پاره خط BI، عمود منصف پاره خط DE است.

پاره خط CH، عمود منصف پاره خط DF است.

بنابراین، ارتفاع‌های مثلث ABC، روی عمود منصف‌های اضلاع مثلث DEF هستند و در نتیجه هم‌رس‌اند.

مثال

صفحه ۱۹ و ۲۰ کتاب درسی

می‌دانیم که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی

نیمساز آن زاویه قرار دارد. حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث هم‌رس‌اند.

استدلال: مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. نیمسازهای زوایای A و B

مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع می‌کنند. از نقطه P، مانند شکل سه عمود به

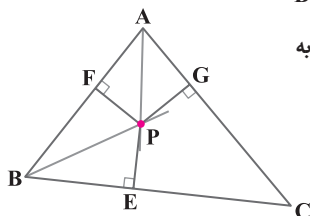
اضلاع مثلث رسم می‌کنیم.

۱- نقطه P روی نیمساز زاویه A است؛ بنابراین $PF = PG$.

۲- نقطه P روی نیمساز زاویه B است؛ بنابراین $PF = PE$.

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $PG = PE$ ؛ بنابراین نقطه P روی نیمساز زاویه C قرار دارد...؛ در نتیجه نقطه P محل برخورد

نیمسازهای زاویه‌های مثلث است.

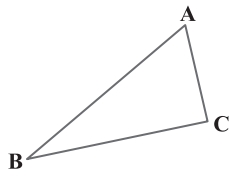




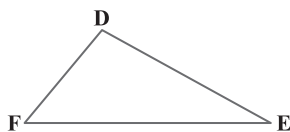
فعالیت

صفحه ۲۰ کتاب درسی

به مثلث‌های زیر دقت کنید. در سطر اول جدول، نام اضلاع مثلث را به ترتیب از بزرگ به کوچک و در سطر دوم، نام زاویه‌های مثلث را نیز به ترتیب از بزرگ به کوچک بنویسید.



اضلاع	AB	BC	AC
زاویه‌ها	$\hat{C}$	$\hat{A}$	$\hat{B}$



اضلاع	FE	DE	DF
زاویه‌ها	$\hat{D}$	$\hat{F}$	$\hat{E}$



اضلاع	GH	IH	GI
زاویه‌ها	$\hat{I}$	$\hat{G}$	$\hat{H}$

چه رابطه‌ای بین هر ضلع و زاویه زیر آن وجود دارد؟ هر چقدر یک ضلع بزرگ‌تر باشد، زاویه روبه‌رو به آن هم بزرگ‌تر است. با توجه به این رابطه درباره یک مثلث دلخواه چه حدسی می‌توان زد؟ در یک مثلث اگر دو ضلع نابرابر باشند، آنگاه زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر است. برای رسیدن به این حدس از چه نوع استدلالی استفاده کردید؟ استدلال استقرایی؛ زیرا فقط براساس چند مشاهده حدس زدیم. آیا با این استدلال می‌توان مطمئن بود که حدس مورد نظر درست است؟ خیر؛ زیرا ما این رابطه را فقط در سه مثلث تحقیق کردیم و ممکن است در مثلث‌های دیگر، چنین رابطه‌ای برقرار نباشد.

مسئله

صفحه ۲۰ و ۲۱ کتاب درسی

اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر. **استدلال:** برای واضح شدن مطلب و کمک به حل مسئله، شکل مثلث را رسم می‌کنیم. آیا می‌توان هر نوع مثلث دلخواهی کشید؟ خیر باید مثلثی بکشیم که دو ضلع نابرابر داشته باشد.

مانند آنچه در مسئله گفته شده است، مثلثی می‌کشیم که دو ضلع نابرابر داشته باشد و ویژگی خاص دیگری نداشته باشد.

فرض: $AB > AC$ حکم: $\hat{C} > \hat{B}$

یادآوری

- در مثلث متساوی‌الساقین زوایای روبه‌رو به ساق‌ها با هم برابرند.
- اندازه هر زاویه خارجی یک مثلث برابر است با مجموع اندازه‌های دو زاویه داخلی غیرمجاورش. بنابراین هر زاویه خارجی مثلث از هر زاویه داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.

می‌دانیم طبق فرض $AB > AC$ است؛ لذا می‌توانیم نقطه D را روی AB جایی انتخاب کنیم که $AC = AD$.

★ اندازه زاویه‌های C و C_1 نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{C}_1 \geq \hat{C}$

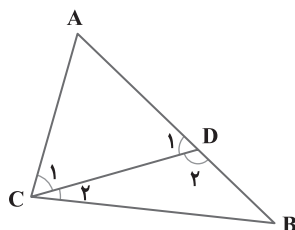
مثلث ADC چه نوع مثلثی است؟

$AC = AD$ پس مثلث ACD متساوی‌الساقین است.

★★ اندازه زاویه‌های C_1 و D_1 نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{C}_1 = \hat{D}_1$

زیرا مثلث ACD متساوی‌الساقین است، پس زاویه‌های کنار ساق‌ها با هم برابرند.

زاویه D_1 چه نوع زاویه‌ای برای مثلث DBC است؟ زاویه D_1 ، زاویه خارجی مثلث DBC است.





★★★ اندازه زاویه‌های D_1 و B نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{D}_1 \square \hat{B}$

زیرا هر زاویه خارجی مثلث، از زاویه‌های داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.

از ★★★ و ★★★ و چه نتیجه‌ای درباره اندازه زاویه‌های B و C می‌توان گرفت؟ $\hat{C} \square \hat{B}$

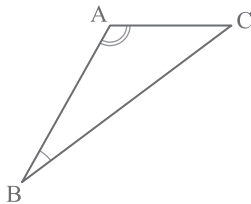
همان‌طور که مشاهده کردید در مثلثی مانند $\triangle ABC$ فرض کردیم که ضلع $AB > AC$ و نشان دادیم: زاویه روبه‌رو به $AC >$ زاویه روبه‌رو به AB .

چرا می‌توان این موضوع را درباره تمام مثلث‌هایی که دو ضلع نابرابر دارند، پذیرفت؟ زیرا برای شکل فوق هیچ شرطی به جز فرض سؤال قائل نشدیم.

پرسش متن صفحه ۲۴ کتاب درسی

عکس قضیه ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر.

برای واضح شدن مسئله و کمک به حل آن، شکل مثلث را رسم می‌کنیم و با استفاده از آن، فرض و حکم را می‌نویسیم.



فرض: $\hat{A} > \hat{B}$

حکم: $BC > AC$

انبات: با برهان غیر مستقیم فرض می‌کنیم حکم غلط باشد؛ بنابراین باید $BC = AC$ یا $BC < AC$. هر دو حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم هر دو حالت به تناقض منجر می‌شود.

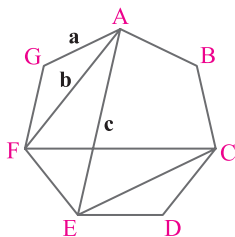
حالت اول: اگر $BC < AC$ باشد، طبق قضیه ۱ باید، $\hat{A} < \hat{B}$ باشد که با فرض در تناقض است.

حالت دوم: اگر $BC = AC$ باشد، $\triangle ABC$ یک مثلث متساوی الساقین خواهد بود و می‌دانیم در این حالت باید $\hat{A} = \hat{B}$ باشد که در تناقض با فرض است. لذا هر دو حالت $BC < AC$ و $BC = AC$ غیر ممکن‌اند؛ بنابراین $BC > AC$ است و حکم درست است.

هندسه

فصل ۱

کار در کلاس صفحه ۲۶ کتاب درسی



① در شکل مقابل نقطه‌ها، رأس‌های یک هفت ضلعی منتظم به طول ضلع a

می‌باشند. فاصله هر رأس از رأس بعدی برابر a و از دومین رأس بعد از آن برابر b

و از سومین رأس بعد از آن برابر c است. آیا حکم کلی زیر درست است؟ «با وصل

کردن هر سه رأس از این شکل یک مثلث متساوی الساقین، به دست می‌آید».

خیر، به عنوان مثال، مثلث AEF متساوی الساقین نیست.

② آیا حکم‌های کلی زیر درست است؟ چرا؟

الف) برای هر دو مجموعه A و B ، یا $A \subseteq B$ و یا $B \subseteq A$

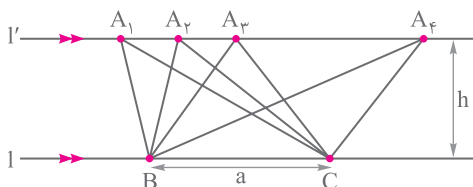
خیر، به عنوان مثال اگر $A = \{1, 2\}$ و $B = \{3, 4\}$ ؛ آنگاه نه $A \subseteq B$ و نه $B \subseteq A$.

ب) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت‌اند.

خیر، به عنوان مثال در شکل روبه‌رو، دو خط l و l' موازی‌اند؛ در

نتیجه تمام مثلث‌های رسم شده دارای مساحت برابرند ولی با هم

هم‌نهشت نیستند. $S_{\triangle A_1BC} = S_{\triangle A_2BC} = \dots = \frac{1}{2}ah$

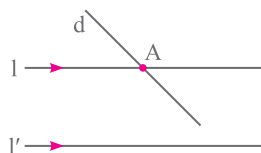




تمرین

صفحه ۲۶ و ۲۷ کتاب درسی

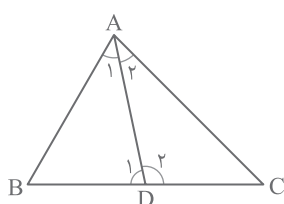
۱) می‌دانیم که از یک نقطه خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.



فرض کنیم دو خط l و l' موازی‌اند و خط d ، خط l را در نقطه A قطع کرده است. اولاً نقطه A روی خط l' قرار ندارد زیرا در این صورت l و l' متقاطع می‌باشند که خلاف فرض است. حال به فرض خلف اگر خط d خط l' را قطع نکند، آنگاه با آن موازی است. یعنی از نقطه A خارج خط l' ، دو خط d و l به موازات آن رسم شده که این تناقض است. پس فرض خلف باطل است و درستی حکم اثبات شد.

۲) با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC ، $AB \neq AC$ ، آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.

در مثلث ABC فرض کنیم $AB \neq AC$. به فرض خلف اگر $\hat{B} = \hat{C}$ ، آنگاه با رسم نیمساز AD و تشکیل دو مثلث ABD و ACD داریم:



$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{D}_1 &= 180^\circ \\ \hat{A}_2 + \hat{C} + \hat{D}_2 &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cancel{\hat{A}_1} + \hat{B} + \hat{D}_1 = \cancel{\hat{A}_2} + \hat{C} + \hat{D}_2 \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2$$

$$\left. \begin{aligned} AD: \hat{A}_1 &= \hat{A}_2 \\ AD: \text{ضلع مشترک} \\ \hat{D}_1 &= \hat{D}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \equiv \triangle ACD \Rightarrow AB = AC$$

(قضی)

این رابطه با فرض سؤال در تناقض است؛ پس فرض خلف باطل است و $\hat{B} \neq \hat{C}$.

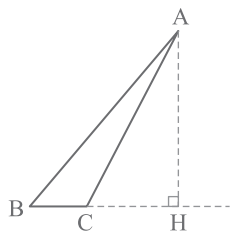
۳) گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

هندسه

فصل ۱

الف) در هر مثلث، اندازه بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازه کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

این گزاره غلط است. به عنوان مثال نقض، در شکل روبه‌رو $\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$ ولی $\hat{A} < 4\hat{C}$ زیرا $\hat{A} = 15^\circ$ و $\hat{C} = 4^\circ$.



ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

این گزاره غلط است. به عنوان مثال در شکل روبه‌رو، ارتفاع AH از دو ضلع AB و AC کوچک‌تر است ولی از ضلع BC بزرگ‌تر است.

تفکری

هر ارتفاع مثلث همواره کوچک‌تر یا مساوی دو ضلع مجاور به آن است ولی ممکن است کوچک‌تر، بزرگ‌تر یا مساوی با ضلع سوم باشد.

۴) نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) هر لوزی یک مربع است. هر لوزی‌ای یک مربع نیست (یا: لوزی‌ای وجود دارد که مربع نباشد).

ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست. مستطیلی وجود ندارد که مربع نباشد (یا: هر مستطیلی یک مربع است).



(پ) مثلثی با دو زاویه قائمه وجود ندارد. مثلثی با دو زاویه قائمه وجود دارد.

(ت) همه فلزات جامدند. همه فلزات جامد نیستند (یا: فلزی وجود دارد که جامد نباشد).

۵) عکس هر یک از قضیه‌های زیر را بنویسید و سپس آنها را به صورت یک قضیه دشرطی بنویسید.

(الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

عکس قضیه: در هر مثلث اگر دو زاویه برابر باشند، دو ضلع روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

قضیه دشرطی: در هر مثلث دو ضلع برابرند اگر و تنها اگر دو زاویه روبه‌رو به آنها برابر باشند.

(ب) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهاش عمودمنصف یکدیگرند.

عکس قضیه: اگر قطرهای یک چهارضلعی عمودمنصف یکدیگر باشند، آن چهارضلعی یک لوزی است.

قضیه دشرطی: یک چهارضلعی لوزی است اگر و تنها اگر قطرهای آن عمودمنصف یکدیگر باشند.

(پ) در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

عکس قضیه: در هر مثلث اگر سه زاویه برابر باشند، آنگاه سه ضلع نیز با هم برابرند.

قضیه دشرطی: در هر مثلث سه ضلع با هم برابرند اگر و تنها اگر سه زاویه با هم برابر باشند.

(ت) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

عکس قضیه: اگر دو دایره مساحت‌های برابر داشته باشند، آنگاه شعاع‌هایشان برابرند.

قضیه دشرطی: شعاع‌های دو دایره با هم برابرند اگر و تنها اگر مساحت‌های آنها با هم برابر باشند.

۶) فرض کنیم ABC مثلثی دلخواه و AD نیمساز زاویه A باشد. دلایل هریک از نتایج زیر را بنویسید و نتیجه نهایی که در پایان

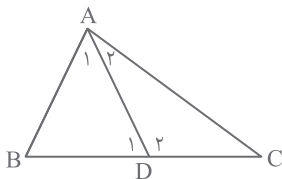
آمده است را کامل کنید.

(الف) $\hat{D}_2 > \hat{A}_1$ ، زیرا $\hat{D}_2$ زاویه خارجی مثلث ABD است.

(ب) $\hat{D}_2 > \hat{A}_2$ ، زیرا $\hat{D}_2 = \hat{A}_1$ و $\hat{A}_1 > \hat{A}_2$ از $\hat{A}_1$ بزرگ‌تر است.

(پ) $AC > DC$ ، زیرا در مثلث ACD ، $\hat{D}_2 > \hat{A}_2$ است.

(ت) با روندی مشابه سه قسمت قبل نشان دهید: $AB > BD$



$$\left. \begin{array}{l} \triangle ACD : \hat{D}_1 : \hat{D}_1 > \hat{A}_2 \\ AD : \hat{A}_2 = \hat{A}_1 \text{ نیمساز } \hat{A} \text{ است.} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{D}_1 > \hat{A}_1$$

$$\triangle ABD : \hat{D}_1 > \hat{A}_1 \Rightarrow AB > BD$$

(ث) حال نشان دهید: $AB + AC > BC$

$$\left. \begin{array}{l} (پ) \Rightarrow AC > DC \\ (ت) \Rightarrow AB > BD \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{جمع می‌کنیم}]{\text{دو نساوی را}} AC + AB > DC + BD \Rightarrow AC + AB > BC$$



در هر مثلث، مجموع اندازه‌های هر دو ضلع، از اندازه ضلع سوم بیشتر است.