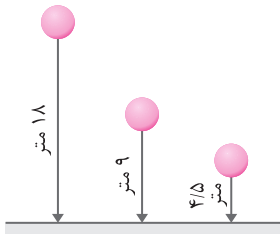
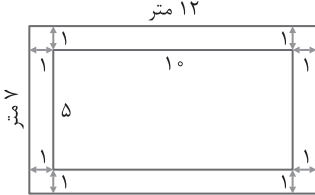
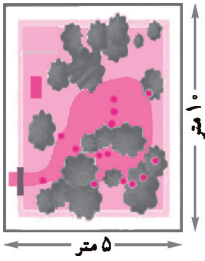


صفحه ۲ کتاب درسی

راهبرد رسم شکل



۱ یک باغچه مستطیل شکل به طول ۱۰ و عرض ۵ متر است. اگر به فاصله یک متر از ضلع های باغچه، دور تا دور آن را نرده بکشیم، چند متر نرده احتیاج داریم؟ ابتدا یک مستطیل رسم کنید.

دور آن به فاصله یک متر از هر ضلع خط بکشید.

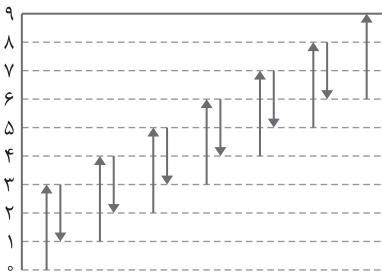
یک مستطیل جدید به وجود می آید. طول و عرض این مستطیل چقدر است؟

متر ۷ = عرض مستطیل جدید ، ۱۲ متر = طول مستطیل جدید

بنابراین: $۳۸ = ۲ \times (۱۲ + ۷) = ۲ \times ۱۹$ متر محیط مستطیل جدید

۲ توپی از ارتفاع ۱۸ متری سطح زمین رها می شود و پس از زمین خوردن، نصف ارتفاع قبلی خود بالا می آید. این توپ از لحظه رها شدن تا سومین مرتبه ای که به زمین می خورد، چند متر حرکت کرده است؟

با توجه به شکل روبهرو، خواهیم داشت: $۴۵ = ۱۸ + ۹ + ۹ + ۴/۵ + ۴/۵$ بنا براین توپ، پس از رها شدن تا سومین مرتبه ای که به زمین می خورد، ۴۵ متر حرکت کرده است.



۳ قورباغه ای می خواهد از یک دیوار عمودی بالا برود. او با هر جهش ۳ متر بالا می رود و هر بار ۲ متر سُر می خورد و پایین می آید. اگر ارتفاع دیوار ۹ متر باشد، او با چند جهش به بالای دیوار می رسد؟ اگر جهش قورباغه را با $\uparrow$ و سُرخوردن آن را با $\downarrow$ نمایش دهیم، با توجه به شکل روبهرو، کافی است تعداد $\uparrow$ را بشماریم. بنابراین قورباغه با ۷ بار جهش به بالای دیوار می رسد. توجه کنید که وقتی قورباغه به بالای دیوار می رسد، دیگر سُر نمی خورد.

صفحه ۳ کتاب درسی

راهبرد الگوسازی

اولین عدد	دومین عدد	حاصل جمع
۱	۲۴	$۱ + ۲۴ = ۲۵$
۲	۱۲	$۲ + ۱۲ = ۱۴$
۳	۸	$۳ + ۸ = ۱۱$
۴	۶	$۴ + ۶ = ۱۰$

۱ دو عدد طبیعی پیدا کنید که حاصل ضرب آنها ۲۴ و حاصل جمع آنها کمترین مقدار باشد. جدول را با یک نظم و ترتیب کامل کنید.

کوچک ترین عدد طبیعی چیست؟ ۱

حاصل ضرب آن در چه عددی ۲۴ می شود؟ ۲۴

کمترین مقدار



اکنون عدد طبیعی بعدی را در نظر بگیرید و به همین ترتیب، عددها را پیدا کنید. دقت کنید که برای نوشتن همه حالت‌ها، ابتدا اولین عدد را انتخاب می‌کنیم (چون اعداد باید طبیعی باشند، از عدد ۱ شروع کردیم) و در هر مرحله، دومین عدد را طوری انتخاب می‌کنیم که حاصل ضرب آن در اولین عدد، برابر ۲۴ شود. توجه کنید که در جدول، اگر اعداد بزرگ‌تر از ۴ را برای اولین عدد در نظر می‌گیریم، حالت‌های تکراری به وجود می‌آید که قبلاً آنها را بررسی کرده‌ایم. بنابراین دو عدد طبیعی مورد نظر ۴ و ۶ هستند.

نکته

به اعداد ۱، ۲، ۳، ... اعداد طبیعی گفته می‌شود.

ریاضی

فصل ۱

۲ با انگشتان یک دست به ۵ صورت می‌توان عدد ۱ را نشان داد. به چند صورت می‌توان عدد ۲ را نشان داد؟ برای نشان دادن عدد ۲ به وسیله انگشتان یک دست، به ۲ انگشت احتیاج داریم. اگر انگشتان دست را شماره‌گذاری کنیم، کافی است تعداد حالت‌هایی را که می‌توان دو شماره غیر تکراری را کنار هم قرار داد، بشماریم.



۴ حالت $\rightarrow (1,2), (1,3), (1,4), (1,5)$

۳ حالت $\rightarrow (2,3), (2,4), (2,5)$

۲ حالت $\rightarrow (3,4), (3,5)$

۱ حالت $\rightarrow (4,5)$

دقت کنید که حالت‌های $(1,2)$ و $(1,3)$ یکسان هستند، بنابراین یکی از آنها را می‌نویسیم. این کار را برای دیگر حالت‌ها نیز انجام می‌دهیم. بنابراین به وسیله انگشتان یک دست به $1+2+3+4=10$ حالت می‌توان عدد ۲ را نشان داد.

۳ با رقم‌های ۷، ۲ و ۵ تمام عددهای سه رقمی ممکن را بنویسید (در عددهای شما می‌تواند رقم‌های تکراری هم باشد). چون عدد مورد نظر، سه رقمی است، جدول ارزش مکانی را با ۳ ستون به صورت زیر در نظر می‌گیریم و تمام اعداد ممکن را می‌نویسیم.

صدگان	دهگان	یکان
۲	۲	۲
۲	۲	۵
۲	۲	۷
۲	۵	۲
۲	۵	۵
۲	۵	۷
۲	۷	۲
۲	۷	۵
۲	۷	۷

صدگان	دهگان	یکان
۵	۲	۲
۵	۲	۵
۵	۲	۷
۵	۵	۲
۵	۵	۵
۵	۵	۷
۵	۷	۲
۵	۷	۵
۵	۷	۷

صدگان	دهگان	یکان
۷	۲	۲
۷	۲	۵
۷	۲	۷
۷	۵	۲
۷	۵	۵
۷	۵	۷
۷	۷	۲
۷	۷	۵
۷	۷	۷

در نتیجه با سه رقم ۷، ۲ و ۵ می‌توان ۲۷ عدد سه رقمی نوشت.

۴ تعداد زیادی سکه‌های ۵۰ و ۱۰۰ تومانی داریم. به چند حالت می‌توان کرایه ۵۰۰ تومانی تاکسی را پرداخت کرد؟



توجه کنید که تعداد سکه‌های ۵۰ تومانی باید حتماً عددی زوج باشد. زیرا اگر تعداد سکه‌های ۵۰ تومانی عددی فرد باشد، نمی‌توان با سکه‌های ۱۰۰ تومانی بقیه پول را تهیه کرد. بنابراین با توجه به جدول زیر، به ۶ حالت می‌توان با سکه‌های ۵۰ و ۱۰۰ تومانی، ۵۰۰ تومان درست کرد.

تعداد سکه‌های ۵۰ تومانی	تعداد سکه‌های ۱۰۰ تومانی	مجموع
۰	۵	$0 \times 50 + 5 \times 100 = 500$
۲	۴	$2 \times 50 + 4 \times 100 = 500$
۴	۳	$4 \times 50 + 3 \times 100 = 500$
۶	۲	$6 \times 50 + 2 \times 100 = 500$
۸	۱	$8 \times 50 + 1 \times 100 = 500$
۱۰	۰	$10 \times 50 + 0 \times 100 = 500$

صفحه ۴ کتاب درسی

راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب

۱ مجموع سن سه نفر ۱۴ سال و حاصل ضرب سن آنها ۷۰ است. سن بزرگ‌ترین نفر چقدر است؟ ابتدا با راهبرد الگوسازی

حاصل جمع	نفر سوم	نفر دوم	نفر اول
$1+1+70=72$	۷۰	۱	۱
$1+2+35=38$	۳۵	۲	۱
$1+5+14=20$	۱۴	۵	۱
$1+7+10=18$	۱۰	۷	۱
$2+5+7=14$	۷	۵	۲

همه حالت‌هایی را که ضرب سه عدد طبیعی برابر ۷۰ می‌شود، بنویسید.

به این جدول چه ستونی باید اضافه کنید تا حالت‌های نامطلوب حذف و

فقط حالت مطلوب باقی بماند؟ ستون حاصل جمع

حالت مطلوب ←

توجه کنید که حاصل ضرب اعداد نوشته‌شده در هر ردیف، برابر ۷۰ است. حال از این حالت‌ها، باید حالتی را انتخاب کنیم که عدد مربوط به ستون حاصل جمع آن برابر ۱۴ باشد. با توجه به جدول، اعداد طبیعی ۲، ۵ و ۷ حالت مطلوب هستند، بنابراین سن بزرگ‌ترین نفر، ۷ سال است.

۲ دوست شما یک عدد حسابی کوچک‌تر از ۱۰۰ را در نظر گرفت. شما باید با طرح چند سؤال، عدد مورد نظر را پیدا کنید. او فقط می‌تواند به سؤال‌های شما بله و خیر بگوید. چگونه می‌توان عدد مورد نظر را پیدا کرد؟

در واقع از ۰ تا ۹۹، ۱۰۰ عدد وجود دارد که فقط یکی مطلوب و مورد نظر است و باقی عددها نامطلوب‌اند. با این توضیح،

کدام یک از سؤال‌های زیر مناسب‌تر است؟ چرا؟ توجه کنید سؤالی مناسب‌تر است که با طرح آن، بتوانیم تعداد بیشتری از حالت‌های

نامطلوب را حذف کنیم. حال سؤال‌های مطرح‌شده را مورد بررسی قرار می‌دهیم.



- آیا عدد مورد نظر شما ۲۷ است؟ در صورتی که جواب خیر باشد، از میان اعداد ۰ تا ۹۹، فقط عدد ۲۷ حذف می‌شود. (یک حالت نامطلوب حذف شده است).
- آیا عدد مورد نظر شما زوج است؟ در صورتی که جواب خیر باشد، از میان اعداد ۰ تا ۹۹، عددهای زوج حذف می‌شوند. (۵۰ حالت نامطلوب حذف شده است).
- آیا عدد مورد نظر شما یک رقمی است؟ در صورتی که جواب خیر باشد، از میان اعداد ۰ تا ۹۹، فقط اعداد ۰ تا ۹ حذف می‌شوند (۱۰ حالت نامطلوب حذف شده است).
- آیا عدد مورد نظر شما از ۵۰ بزرگ‌تر است؟ در صورتی که جواب خیر باشد، از میان اعداد ۰ تا ۹۹، عددهای ۵۱ تا ۹۹ حذف می‌شوند. (۴۹ حالت نامطلوب حذف شده است).

با توجه به پاسخی که به سؤال بالا دادید، یک روش طرح سؤال همراه با نظم و ترتیب بیان کنید که بتوان با پرسیدن آنها، به عدد

مورد نظر رسید.

سؤال	پاسخ	نتیجه‌گیری
بزرگ‌تر از ۵۰ است؟	خیر	بین ۰ تا ۵۰ است.
بزرگ‌تر از ۲۵ است؟	بله	بین ۲۶ تا ۵۰ است.
بزرگ‌تر از ۳۸ است؟	خیر	بین ۲۶ تا ۳۸ است.
بزرگ‌تر از ۳۲ است؟	خیر	بین ۲۶ تا ۳۲ است.
بزرگ‌تر از ۲۹ است؟	بله	بین ۳۰ تا ۳۲ است.
بزرگ‌تر از ۳۱ است؟	خیر	عدد مورد نظر ۳۰ یا ۳۱ است.
عدد مورد نظر، ۳۰ است؟	خیر	عدد مورد نظر ۳۱ است.

به‌نظر می‌رسد در پرسش اول مربوط به طرح سؤال‌ها، سؤال‌های دوم و چهارم داده‌شده در صورت مسئله، برای حذف حالت‌های نامطلوب مناسب‌تر هستند. بنابراین برای رسیدن به عدد مورد نظر، جدول مقابل را تشکیل می‌دهیم. با توجه به جدول، با طرح سؤالات هدف‌دار و نتیجه‌گیری درست از پاسخ سؤالات مطرح‌شده، می‌توان به عدد مورد نظر رسید. دقت کنید که در هر بار، تقریباً نصف حالت‌ها که نامطلوب هستند، حذف می‌شوند. زیرا هر بار عدد وسط را در اعداد حذف نشده در نظر می‌گیریم و بزرگ‌تر بودن از آن را مورد سؤال قرار می‌دهیم.

دقت کنید که از هریک از سؤال‌های داده‌شده در صورت مسئله، ممکن است در جای مناسب خود استفاده شود.



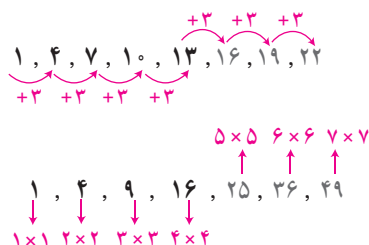
به اعداد ۰، ۱، ۲، ۳ ... اعداد حسابی گفته می‌شود.

صفحه ۵ کتاب درسی

راهنمای گویابی

۱ سه عدد بعدی الگوهای زیر را بنویسید. رابطه بین عددها را توضیح دهید.

عددها سه‌تا سه‌تا اضافه می‌شوند.



عددها از حاصل ضرب اعداد طبیعی در خودشان (با شروع از عدد ۱) به‌دست آمده‌اند.

هر عدد، نصف عدد قبلی است. (هر عدد از تقسیم عدد قبلی بر عدد ۲ به دست می آید.)



۲ شکل دهم با چند چوب کبریت ساخته می شود؟ چرا؟ ابتدا تعداد چوب کبریت های هر شکل را می شماریم و زیر آن می نویسیم.



شکل (۱)

۱



شکل (۲)

۴



شکل (۳)

۷



شکل (۴)

۱۰



با توجه به اعداد به دست آمده در بالا، الگوی روبه رو را خواهیم داشت:

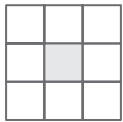
در این الگوی عددها هر عدد از اضافه کردن ۳ واحد به عدد قبلی به دست می آید.

بنابراین کافی است در الگوی به دست آمده، با توجه به رابطه بین اعداد، عدد دهم را به دست آوریم. داریم:

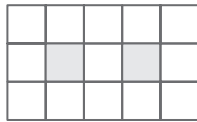
شکل دهم با ۲۸ چوب کبریت ساخته می شود. $\rightarrow (28)$ ، ۲۵، ۲۲، ۱۹، ۱۶، ۱۳، ۱۰، ۷، ۴، ۱

۳ اگر شکل ها به همین ترتیب ادامه پیدا کنند، چه کسری از شکل شماره ۶، رنگی است؟ ابتدا کسر مربوط به قسمت رنگی هر

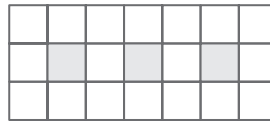
شکل را زیر آن می نویسیم.



شکل (۱)

 $\frac{1}{9}$ 

شکل (۲)

 $\frac{4}{16}$ 

شکل (۳)

 $\frac{9}{25}$

...، $\frac{3}{21}$ ، $\frac{2}{15}$ ، $\frac{1}{9}$

با توجه به کسرهای به دست آمده در بالا، الگوی روبه رو را خواهیم داشت:

...، $\frac{3}{3 \times 7}$ ، $\frac{2}{3 \times 5}$ ، $\frac{1}{3 \times 3}$

بنابراین کافی است الگوی به دست آمده را تا جمله ششم ادامه دهیم. داریم:

$\frac{6}{3 \times 13}$ از شکل شماره ۶، رنگی است. $\rightarrow \frac{6}{3 \times 13}$ ، $\frac{5}{3 \times 11}$ ، $\frac{4}{3 \times 9}$ ، $\frac{3}{3 \times 7}$ ، $\frac{2}{3 \times 5}$ ، $\frac{1}{3 \times 3}$

صفحه ۶ کتاب درسی

راهنما و آزمایش

۱ ۲۰ دستگاه دوچرخه و سه چرخه در یک توقفگاه (مصبوب فرهنگستان Parking) وجود دارد. اگر تعداد کل چرخ های آنها ۴۵ عدد باشد،

وجود دارد؟

بررسی و آزمایش		
تعداد دوچرخه	تعداد سه چرخه	تعداد دوچرخه
۱۰	۱۰	(تعداد دوچرخه ها را زیاد می کنیم.) $10 \times 2 + 10 \times 3 = 50$
۱۱	۹	(تعداد دوچرخه ها را زیاد می کنیم.) $11 \times 2 + 9 \times 3 = 49$
۱۲	۸	(تعداد دوچرخه ها را زیاد می کنیم.) $12 \times 2 + 8 \times 3 = 48$
۱۳	۷	(تعداد دوچرخه ها را زیاد می کنیم.) $13 \times 2 + 7 \times 3 = 47$
۱۴	۶	(تعداد دوچرخه ها را زیاد می کنیم.) $14 \times 2 + 6 \times 3 = 46$
۱۵	۵	(حدس درست است.) $15 \times 2 + 5 \times 3 = 45$



در حدس اول، تعداد دوچرخه‌ها را 10° و تعداد سه‌چرخه‌ها را هم 10° عدد در نظر بگیرید. حدس خود را از تعداد دوچرخه‌ها شروع می‌کنیم. توجه کنید که ما فقط تعداد دوچرخه‌ها را حدس می‌زنیم و تعداد سه‌چرخه‌ها را باید طوری انتخاب کنیم که مجموع دوچرخه‌ها و سه‌چرخه‌ها برابر 20° تا شود.

با کامل کردن ردیف اول جدول حدس خود را بررسی و آزمایش کنید. دقت کنید در حالتی که تعداد دوچرخه‌ها و سه‌چرخه‌ها هر کدام 10° عدد بود، مجموع کل چرخ‌ها برابر 50° عدد شد. چون 50° بزرگ‌تر از 45° است، باید کاری کنیم که تعداد کل چرخ‌ها کمتر شود تا به 45° برسد. برای این منظور، تعداد دوچرخه‌ها را زیاد می‌کنیم.

با توجه به نتیجه بررسی، باید تعداد سه‌چرخه‌ها را بیشتر کرد یا دوچرخه‌ها را؟ چرا؟

باید تعداد دوچرخه‌ها را بیشتر کنیم، چون تعداد چرخ‌های آن کمتر از تعداد چرخ‌های سه‌چرخه است. با توجه به جدول، تعداد دوچرخه‌ها 15° و تعداد سه‌چرخه‌ها 5° است.

نوجه

در روش حدس و آزمایش، حدس اولیه ما، هر چیزی می‌تواند انتخاب شود، فقط ممکن است با حدس‌های مختلف، تعداد مرحله‌ای که قرار است طی شود تا به جواب برسیم، متفاوت باشد. مثلاً در حل این تمرین، با حدس اولیه 10° برای تعداد دوچرخه‌ها، طی ۶ مرحله به جواب رسیدیم.

۲ دو زاویه متمم‌اند. یکی از این زاویه‌ها ۳ برابر زاویه دیگر است. اندازه هر زاویه را پیدا کنید.

بررسی و آزمایش	زاویه دوم	زاویه اول
$10^\circ + 30^\circ = 40^\circ$	$3 \times 10^\circ = 30^\circ$	10°
$15^\circ + 45^\circ = 60^\circ$	$3 \times 15^\circ = 45^\circ$	15°
$20^\circ + 60^\circ = 80^\circ$	$3 \times 20^\circ = 60^\circ$	20°
$22/5^\circ + 67/5^\circ = 90^\circ$	$3 \times 22/5^\circ = 67/5^\circ$	$22/5^\circ$

می‌دانیم وقتی دو زاویه، متمم یکدیگر هستند که مجموعشان 90° باشد. حال حدس خود را از زاویه اول شروع می‌کنیم. توجه می‌کنیم که در این حالت، زاویه دوم باید طوری انتخاب شود که سه برابر زاویه اول باشد. با توجه به جدول روبه‌رو، زاویه‌های مورد نظر $22/5^\circ$ و $67/5^\circ$ هستند.

نوجه

در روش حدس و آزمایش، لزومی ندارد حدس‌های خود را یک واحد یک یا کاهش دهیم، ممکن است این افزایش یا کاهش، نظم و ترتیب خاصی نداشته باشد.

بررسی و آزمایش	$3 \times \square + 10$	$\square$
$\square$ را کاهش می‌دهیم.	$3 \times 10 + 10 = 40$	۱۰
$\square$ را کاهش می‌دهیم.	$3 \times 9 + 10 = 37$	۹
$\square$ را کاهش می‌دهیم.	$3 \times 8 + 10 = 34$	۸
حدس درست است.	$3 \times 7 + 10 = 31$	۷

۳ به جای $\square$ چه عددی می‌توان قرار داد؟ $3 \times \square + 10 = 31$

به جای $\square$ عددهای مختلفی را حدس بزنید، از عدد ۱۰ شروع کنید.

$$3 \times 10 + 10 = 40$$

با توجه به جدول روبه‌رو، مقدار $\square$ برابر با عدد ۷ است. توجه کنید که در

حدس اولیه، چون حاصل برابر ۴۰ شد، باید مقدار $\square$ را کاهش می‌دادیم

تا حاصل عبارت از ۴۰ به ۳۱ برسد.

صفحه ۷ کتاب درسی

راهبرد زنجیر مسئله

۱ پس‌انداز هفتگی محمد، ۳۰۰۰ تومان است. او حساب کرد ۵ هفته پس‌انداز او، نصف قیمت کیفی است که دوست دارد بخرد. قیمت کیف چقدر است؟

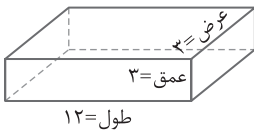
$$5 \times 3000 = 15000 \text{ تومان}$$

$$2 \times 15000 = 30000 \text{ تومان}$$

(الف) پس‌انداز ۵ هفته چقدر می‌شود؟

(ب) اگر این عدد نصف قیمت کیف باشد، قیمت کیف چقدر است؟

۲ طول، عرض و عمق یک استخر به ترتیب ۱۲، ۶ و ۳ متر است. می‌خواهند کف و دیوارهای این استخر را رنگ کنند. اگر برای هر مترمربع $\frac{1}{3}$ کیلوگرم رنگ لازم باشد، برای رنگ کردن استخر، چند کیلوگرم رنگ نیاز است؟



$$\text{مترمربع } 72 = 12 \times 6 = \text{عرض} \times \text{طول}$$

(الف) مساحت کف استخر چقدر است؟

(ب) مساحت دیوارهای این استخر چقدر است؟ دقت کنید که دیوارهای روبه‌روی هم، دارای

مساحت برابر هستند. بنابراین باید مساحت هر دیوار را ۲ برابر کنیم.

$$\left. \begin{aligned} 72 \times 2 &= 144 \Rightarrow 2 \times 36 = 144 \Rightarrow \text{مترمربع } 36 = 12 \times 3 = \text{عمق} \times \text{طول} \\ 72 \times 2 &= 144 \Rightarrow 2 \times 18 = 36 \Rightarrow \text{مترمربع } 18 = 6 \times 3 = \text{عرض} \times \text{عمق} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 72 + 36 = 108 \text{ مترمربع}$$

$$108 + 72 = 180 \text{ مترمربع}$$

(ج) کل مساحتی که باید رنگ شود، چقدر است؟

(د) مقدار رنگ مورد نیاز، چقدر است؟

کیلوگرم	$\frac{1}{3}$	?
مترمربع	۱	۱۸۰

$$\Rightarrow ? = \frac{1/3 \times 180}{1} \Rightarrow ? = 54 \text{ کیلوگرم}$$

۳ میوه‌فروشی، امروز ۴۰ کیلوگرم سیب به قیمت هر کیلوگرم ۲۵۰۰ تومان و ۸۰ کیلوگرم پرتقال به قیمت هر کیلوگرم ۱۵۰۰ تومان خرید. او هر کیلوگرم سیب را ۳۰۰۰ تومان و هر کیلوگرم پرتقال را ۲۰۰۰ تومان فروخت. این میوه‌فروش، از

این کار خود چقدر سود برده است؟

(الف) مقدار پولی که برای خرید ۴۰ کیلوگرم سیب و ۸۰ کیلوگرم پرتقال، پرداخت شده است، چقدر است؟

$$40 \times 2500 + 80 \times 1500 = 10000 + 12000 = 22000 \text{ تومان}$$



ب) مقدار پولی که از فروش ۴۰ کیلوگرم سیب و ۸۰ کیلوگرم پرتقال به دست آمده، چقدر است؟

$$۴۰ \times ۳۰۰۰ + ۸۰ \times ۲۰۰۰ = ۱۲۰۰۰۰ + ۱۶۰۰۰۰ = ۲۸۰۰۰۰ \text{ تومان}$$

$$۲۸۰۰۰۰ - ۲۲۰۰۰۰ = ۶۰۰۰۰ \text{ تومان}$$

ج) سود حاصل از فروش میوه‌ها، چقدر است؟

صفحه ۸ کتاب درسی

راهنمای حل مسئله ساده‌تر

ریاضی

فصل ۱

۱ قطر خورشید ۱۳۹۲۵۳۰ کیلومتر و قطر کره زمین ۱۲۷۵۶/۶ کیلومتر است. قطر خورشید تقریباً چند برابر قطر زمین است؟

$$۱۳۹۲۵۳۰ \approx ۱۰۰۰۰۰۰$$

برای ساده شدن مسئله بهتر است از عددهای تقریبی استفاده کنید.

$$۱۲۷۵۶/۶ \approx ۱۰۰۰۰$$

خلاصه مسئله ساده‌شده را بنویسید و پاسخ دهید.

برای ساده‌تر شدن مسئله، قطر خورشید را به صورت تقریبی برابر با ۱۰۰۰۰۰۰ کیلومتر و قطر زمین را نیز به صورت تقریبی برابر با ۱۰۰۰۰ کیلومتر

$$۱۰۰۰۰۰۰ \div ۱۰۰۰۰ = ۱۰۰$$

در نظر می‌گیریم. در این حالت جواب تقریبی به صورت روبه‌رو به دست می‌آید:

توجه کنید که جواب تقریبی مسئله اصلی به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$\begin{array}{r} ۱۳۹۲۵۳۰ \cdot \frac{۱۲۷۵۶/۶}{۱۰۰۰۰} \xrightarrow{\times ۱۰} \begin{array}{r} ۱۳۹۲۵۳۰۰ \\ - ۱۲۷۵۶۶ \\ \hline ۱۱۶۸۷۰۰ \\ - ۱۱۴۸۰۹۴ \\ \hline ۲۰۶۰۶ \end{array} \end{array}$$

جواب تقریبی ۱۰۹

بنابراین قطر خورشید، به صورت تقریبی ۱۰۹ برابر قطر کره زمین است.

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} + \dots + \frac{۱}{۱۰۲۴}$$

۲ حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

به جای حل کردن عبارت بالا، ابتدا ساده‌شده این مسئله را حل کنید.

در پاسخ‌ها چه الگو و رابطه‌ای تشخیص می‌دهید که به کمک آن بتوانید پاسخ مسئله اصلی را بدون محاسبه بنویسید؟

با توجه به صورت مسئله، برای به دست آوردن جواب باید همه کسرها را هم‌مخرج کنیم، سپس حاصل جمع را محاسبه کنیم که این کار بسیار

وقت‌گیر و دشوار است. برای به دست آوردن جواب، چند مسئله با تعداد کسرها کمتر در نظر می‌گیریم و جواب آنها را پیدا می‌کنیم، سپس از

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} = \frac{۲}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

طریق الگویی به جواب مسئله اصلی می‌رسیم.

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} = \frac{۴}{۸} + \frac{۲}{۸} + \frac{۱}{۸} = \frac{۷}{۸}$$

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۸}{۱۶} + \frac{۴}{۱۶} + \frac{۲}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۱۵}{۱۶}$$

با توجه به جواب‌های به دست آمده برای مسئله‌های ساده‌تر بالا، الگوی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}, \quad \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} = \frac{۷}{۸}, \quad \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۱۵}{۱۶}, \dots$$

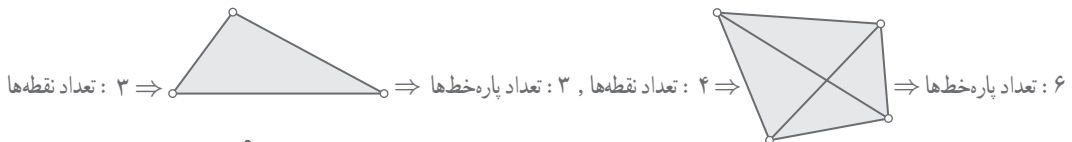


به نظر می‌آید که حاصل جمع هر مرحله، برابر است با کسری که صورتش از مخرجش یک واحد کمتر و مخرجش برابر مخرج کسر آخر در جمع داده شده است. بنابراین با توجه به الگوی به‌دست آمده، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024} - 1$$

مخرج کسر آخر

۳ اگر ۱۰ نقطه را که هیچ سه‌تای آنها روی یک خط نیستند، دوبه‌دو به هم وصل کنیم؛ چند پاره‌خط به وجود می‌آید؟ تعداد پاره‌خط‌ها در واقع، مجموع تعداد ضلع‌ها و تعداد قطر‌هاست. یک الگو پیدا کنید و برای ۱۰ نقطه نتیجه‌گیری کنید. برای حل این مسئله، باید ۱۰ نقطه را که هیچ ۳ تایی از آنها روی یک خط قرار ندارند، در نظر بگیریم. سپس آنها را دوبه‌دو به یکدیگر وصل کنیم و در نهایت تعداد پاره‌خط‌ها را در شکل به‌دست‌آمده بشماریم. این کار بسیار دشوار است. برای رسیدن به جواب، چند مسئله ساده‌تر را در نظر می‌گیریم و در هر یک، پاسخ را به‌دست می‌آوریم، سپس با یافتن یک الگو بین پاسخ‌ها، پاسخ مسئله اصلی را می‌یابیم. داریم:



$$3, 6, 10, 15, \dots$$

+3 +4 +5

$$3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45$$

+3 +4 +5 +6 +7 +8 +9

حال برای جواب‌های مسئله‌های ساده‌تر بالا، الگوی روبه‌رو به‌دست می‌آید:

و با ادامه دادن الگوی به‌دست‌آمده، داریم:

با توجه به‌صورت مسئله، فقط مجموع تعداد قطر‌ها و ضلع‌های شکل حاصل را محاسبه کردیم و پاره‌خط‌هایی که از برخورد قطر‌ها با یکدیگر به‌وجود می‌آیند را در نظر نگرفتیم.

نکته

در یک چندضلعی، مجموع تعداد قطر‌ها و تعداد اضلاع برابر $\frac{(1 - \text{تعداد نقطه‌ها}) \times \text{تعداد نقطه‌ها}}{2}$ است.

با استفاده از نکته فوق، جواب مسئله برای ۱۰ نقطه، برابر با $\frac{10 \times (10 - 1)}{2} = 45$ است.

صفحه ۹ کتاب درسی

راهِبرد روش‌های نمادین

۱ احمد ۳۰۰۰۰ تومان پول داشت. او ۴ دفتر خرید و ۲۰۰۰ تومان برایش باقی ماند. قیمت هر دفتر چقدر است؟

$$4 \times \square + 2000 = 30000$$

متن این سؤال را می‌توانید با تساوی مقابل نشان دهید.

مربع نشان‌دهنده چه چیزی است؟ قیمت هر دفتر

$$2 \times \square + 2000 = 3000$$

حالا عددی را که باید در قرار بگیرد، حدس می‌زنیم. برای حل

با توجه به جدول روبه‌رو، عددی که باید در قرار گیرد تا تساوی

$$4 \times \boxed{} + 2000 = 3000$$

یعنی $4 \times \boxed{}$ برقرار شود، برابر ۷۰۰۰ است، یعنی

قیمت هر دفتر ۷۰۰۰ تومان است.

	$۴ \times \square + ۲۰۰۰$	بررسی و آزمایش
۳۰۰۰	$۴ \times ۳۰۰۰ + ۲۰۰۰ = ۱۴۰۰۰$	را زیاد می‌کنیم.
۶۰۰۰	$۴ \times ۶۰۰۰ + ۲۰۰۰ = ۲۶۰۰۰$	را زیاد می‌کنیم.
۸۰۰۰	$۴ \times ۸۰۰۰ + ۲۰۰۰ = ۳۴۰۰۰$	را کم می‌کنیم.
۷۰۰۰	$۴ \times ۷۰۰۰ + ۲۰۰۰ = ۳۰۰۰۰$	حدس درست است.

فاطمه به طور متوسط در هر ساعت، چند صفحه از آن را مطالعه کرده است؟

اگر $\square$ نشان دهنده میانگین صفحه‌های مطالعه‌شده در هر ساعت باشد، متن مسئله به صورت روبه‌رو خواهد بود: $100 = 10 + 6 \times \square$

حالا عددی را که باید در قرار بگیرد، حدس می‌زنیم. برای این

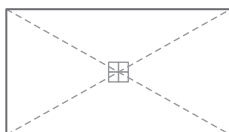
کار از راہبرد حدس و آزمایش کمک می گیریم.

با توجه به جدول روبه‌رو، عددی که باید در قرار گیرد تا تساوی

$100 = 10 + 6 \times \square$ برقرار شود، برابر ۱۵ است. این یعنی فاطمه به طور

متوسط در هر ساعت، ۱۵ صفحه از کتاب داستان را مطالعه کرده است.

	$۶ \times \square + ۱۰$	بررسی و آزمایش
۱۰	$۶ \times ۱۰ + ۱۰ = ۷۰$	را زیاد می‌کنیم
۱۲	$۶ \times ۱۲ + ۱۰ = ۸۲$	را زیاد می‌کنیم
۱۴	$۶ \times ۱۴ + ۱۰ = ۹۴$	را زیاد می‌کنیم
۱۵	$۶ \times ۱۵ + ۱۰ = ۱۰۰$	حدهست درست است



۳ یک سالن مستطیل شکل است. می‌خواهند در مکانی از سقف این سالن، دریچهٔ خنک‌کن (مصبوب فرنگستان Cooler) قرار دهند؛ به‌طوری‌که از ۴ گوشهٔ آن به یک اندازه باشد. محل دریچه را تعیین کنید. از آنجا که در هر مستطیل، قطر‌ها با هم برابرند و یکدیگر را نصف می‌کنند، بنابراین محل دریچهٔ خنک‌کن را در نقطهٔ تقاطع قطر‌های مستطیل در نظر می‌گیریم که از ۴ گوشهٔ مستطیل، به یک فاصله است.

صفحة ۱۰ تا ۱۲ کتاب درسی

مرور راہبردہا

۱. $\frac{1}{3}$ دانش‌آموزان کلاسی بسکتبال و $\frac{1}{5}$ دانش‌آموزان آن کلاس فوتبال بازی می‌کنند. سایر دانش‌آموزان که تعدادشان

۱۴ نفر است، بازی آنها را تماشا می‌کنند. این کلاس چند دانش‌آموز دارد؟

از راهبرد رسم شکل، استفاده می‌کنیم. با توجه به شکل روبه‌رو، سهم تماشاچیان

از کل شکل، ۷ قسمت است و چون تعداد تماشاچیان ۱۴ نفر است، بنابراین سهم

هر قسمت ۲ نفر است. از آن جا که شکل به ۱۵ قسمت مساوی تقسیم شده است،

بنابراین تعداد کل دانش‌آموزان $30 = 2 \times 15$ نفر است. دقت کنید که با توجه به

شکل، $۱۰ = ۵ \times ۲$ نفر بسکتبال و $۶ = ۳ \times ۲$ نفر فوتبال بازی می کنند.

$\frac{1}{3}$ بسکتبال

بسکتبال				
بسکتبال	بسکتبال	بسکتبال	بسکتبال	بسکتبال
بسکتبال	بسکتبال	فوتبال	فوتبال	

 $\frac{1}{8}$ فوتبال



۲ مساحت مربعی به ضلع ۱۰۰ سانتی متر، ۱ متر مربع است. اگر از ضلع مربع ۱۰ درصد کم کنیم، مساحت مربع چند درصد کم می شود؟

روش اول: از راهبرد زیر مسئله استفاده می کنیم.

(الف) ۱۰٪ یک ضلع (یک متر) چقدر است؟

(ب) طول ضلع مربع جدید چقدر است؟

(ج) مساحت هر دو مربع چقدر خواهد بود؟

(د) نسبت مساحت مربع جدید به مساحت مربع اول برحسب درصد چقدر است؟

(ه) اختلاف مساحتها برحسب درصد چقدر است؟

بنابراین مساحت مربع، ۱۹٪ کم می شود.

روش دوم: از راهبرد رسم شکل استفاده می کنیم. تعداد مربعهای رنگی، مربوط

به مساحت کم شده از مربع اصلی است که آن را به صورت درصد بیان می کنیم.

$$\frac{19}{100} = 19\%$$

$$\frac{1}{100} \times 1 = \frac{1}{100} \text{ متر} = 1\% \text{ سانتی متر}$$

$$1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} \text{ متر} = 99\% \text{ سانتی متر}$$

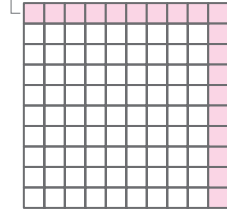
سانتی متر مربع $1 = 10000$ متر مربع: مساحت مربع اول

سانتی متر مربع $99 \times 99 = 9801$: مساحت مربع جدید

$$\frac{9801}{10000} = \frac{981}{1000} = 98.1\%$$

$$100\% - 98.1\% = 1.9\%$$

$$1\% = \frac{1}{100} = \frac{1}{100}$$



$$10\% = \frac{1}{100} = \frac{1}{10}$$

۳ کشاورزی، زمین خود را به نسبت های روبهرو بذریاشی کرده است: گندم: ۴۵٪ جو: ۳۷/۵٪ ذرت: ۱۷/۵٪

اگر مساحت زمین او ۱۵ هکتار باشد، مساحت زیر کشت هر بذر را حساب کنید. از راهبرد حل مسئله

ساده تر کمک می گیریم. برای این منظور نسبت ها را به صورت ساده تر نوشته، سپس مسئله را حل می کنیم.

گندم	۱۸	۶۷۵۰۰
جو	۱۵	۵۶۲۵۰
ذرت	۷	۲۶۲۵۰
کل	۴۰	۱۵۰۰۰۰

$$45\% = \frac{45}{100} = \frac{9}{20} = \frac{18}{40} \text{ گندم}$$

$$37.5\% = \frac{37.5}{100} = \frac{375}{1000} = \frac{75}{200} = \frac{15}{40} \text{ جو}$$

$$17.5\% = \frac{17.5}{100} = \frac{175}{1000} = \frac{35}{200} = \frac{7}{40} \text{ ذرت}$$

از آنجا که ۱۵ بر ۴۰ بخش پذیر نیست، ۱۵ هکتار را به صورت ۱۵۰۰۰۰ متر مربع نوشتیم تا بتوانیم آن را بر ۴۰ تقسیم کنیم.

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \dots \times \frac{1}{100} =$$

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{48} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{24} = \frac{1}{48}$$

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{240} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{120} = \frac{1}{240}$$

۴ حاصل عبارت روبهرو را پیدا کنید.

از راهبرد حل مسئله ساده تر و الگویابی استفاده می کنیم.



با توجه به پاسخ‌های به‌دست‌آمده برای مسئله‌های ساده‌تر بالا، الگوی زیر به دست می‌آید:

$$\underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}_{\frac{1}{6}}, \quad \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}_{\frac{1}{24}}, \quad \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5}}_{\frac{1}{120}}, \quad \dots$$

با توجه به الگوی بالا، به نظر می‌رسد حاصل هر مرحله برابر با کسری است که مخرج آن ۲ و صورتش یک واحد بیشتر از مخرج کسر آخر در

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \dots \times \frac{1}{100} = \frac{1}{100!} \quad \text{بنابراین:}$$

۵ در یک کارگاه تولید کفش، ۴۹۶۰ جفت کفش تولید شده است. $\frac{3}{8}$ آنها پسرانه و بقیه دخترانه است. اگر قیمت هر جفت

کفش پسرانه ۲۷۰۰۰ تومان و قیمت هر جفت کفش دخترانه ۳۴۰۰۰ تومان باشد، درآمد این کارگاه چقدر است؟

از راهبرد زیر مسئله استفاده می‌کنیم.

$$\text{جفت } \frac{3}{8} \times 4960 = 1860$$

الف) تعداد کفش‌های پسرانه را به‌دست می‌آوریم.

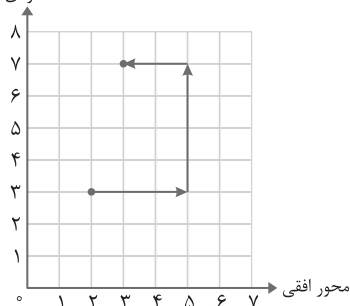
$$\text{جفت } 4960 - 1860 = 3100$$

ب) تعداد کفش‌های دخترانه را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{تومان } 1860 \times 27000 + 3100 \times 34000 = 5020000 + 10540000 = 15560000$$

ج) درآمد کارگاه را به‌دست می‌آوریم.

محور عمودی



۶ سارا یک بازی روی صفحه شطرنجی انجام می‌دهد. مهره او روی خانه

$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ است. او ابتدا مهره‌اش را ۳ خانه به سمت راست، سپس ۴ خانه به سمت بالا

و در انتها ۲ خانه به سمت چپ آورد. در حال حاضر، مهره سارا روی کدام خانه

قرار دارد؟

از راهبرد رسم شکل کمک می‌گیریم.

با توجه به محورهای مختصات رسم‌شده، مهره سارا در نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ قرار دارد.

۷ چه کسری از شکل زیر رنگی است؟ توضیح دهید.

با توجه به شکل روبه‌رو، باید شکل را به قسمت‌های مساوی تقسیم‌بندی کنیم. در تقسیم‌بندی

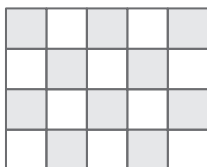
انجام‌شده، شکل به ۶۴ قسمت مساوی تقسیم‌بندی شده است. بنابراین $\frac{1}{64}$ از شکل، رنگی

است. دقت کنید که کل مستطیل، به ۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. بنابراین می‌توانستیم

تعداد تقسیم‌بندی‌های یک قسمت را حساب کنیم و در نهایت، آن را در عدد ۴ ضرب کنیم تا

تعداد قسمت‌های کل شکل به‌دست آید.






 $\Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,
 
 $\Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,
 
 $\Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{5}{9} \approx 0.55$,

 $\Rightarrow \frac{4}{9} \approx 0.45$

Diagram illustrating the relationship between the number of pink and white squares in a 5x5 grid. The left grid shows 13 pink squares and 12 white squares, resulting in the fraction $\frac{13}{25} = 0.52$. The right grid shows 12 pink squares and 13 white squares, resulting in the fraction $\frac{12}{25} = 0.48$.

توجه داشته باشید که کلمه «تقریباً» باید در صورت مسئله باشد، زیرا در غیر این صورت، نمی‌توان به مسئله پاسخ داد.

$$(1, 36), (2, 18), (3, 12), (4, 9), (6, 6)$$

مجموع	دومین عدد	اولین عدد
$1+36=37$	36	1
$2+18=20$	18	2
$3+12=15$	12	3
$4+9=13$	9	4
$6+6=12$	6	6

کمترین مجموع

خرید آنلاین در gajmarket.com



۱۰ عددی را ۵ برابر ۳ واحد از آن کم کردیم، حاصل ۳۲ شد. عدد مورد نظر چند است؟ از راهبرد روش‌های نمادین و حدس و آزمایش کمک می‌گیریم. اگر فرض کنیم عدد مورد نظر باشد، متن مسئله را می‌توان به صورت تساوی زیر نوشت:

$$5 \times \square - 3 = 32$$

	$5 \times \square - 3$	بررسی و آزمایش
۱	$5 \times 1 - 3 = 2$	را زیاد می‌کنیم
۵	$5 \times 5 - 3 = 22$	را زیاد می‌کنیم
۷	$5 \times 7 - 3 = 32$	حدس درست است

حالا باید ببینیم که چه عددی در می‌تواند قرار بگیرد. با توجه به جدول رویه‌رو، به جای می‌توان عدد ۷ را قرار داد تا تساوی $32 = 5 \times \square - 3$ برقرار شود. بنابراین عدد مورد نظر، ۷ است.